

KOSPI 200 옵션가격을 이용한 옵션의 가치결정함수 추정

강 장 구 (KAIST)
한 상 일 (금융연구원)
조 태 근 (금융연구원)

KOSPI 200 옵션가격을 이용한 옵션의 가치결정함수 추정*

(공동연구) 강 장 구(KAIST 테크노 경영대학원)

한 상 일(한국금융연구원)

조 태 근(한국금융연구원)

<요 약>

본 연구에서는 KOSPI 200 옵션자료를 이용하여 옵션의 가치결정함수를 추정하였다. 기초자산이 Heston(1993)의 확률변동성 모형을 따른다는 가정하에 EMM을 통해 가치결정함수의 모수를 추정하였다. 내재 변동성의 SNP 분포 추정결과 AR(2) 및 ARCH 효과가 분포에 내재 되어있는 것으로 나타났다. 또한 정규분포보다 첨도가 훨씬 크며, 왼쪽 꼬리는 정규분포보다 작으며, 오른쪽 꼬리는 더 두꺼운 특징을 보여주고 있다. 따라서 KOSPI 200 옵션의 내재변동성은 왼쪽 꼬리는 정규분포보다 두꺼우며, 오른쪽 꼬리는 두꺼운 S&P 500의 내재 변동성과 다른 분포 형태를 보여주고 있다. 확률 변동성 모형은 기각되었으며, 모수 추정결과 KOSPI 200 옵션시장의 내재 변동성은 평균으로 회귀하려는 경향이 미미해서 비정상적(nonstationary) 시계열에 가까우며, 내재 변동성과 기초자산의 수익률간의 관계는 아주 작은 음(-)으로 추정되었다. 이러한 사실은 내재 변동성의 평균회귀현상이 강하고 내재 변동성과 기초자산간의 음(-)의 관계가 큰 것으로 S&P 500 옵션시장과 대치되는 현상이다.

핵심 단어 : 가치결정함수, EMM, SNP, 내재 변동성, 확률변동성

* 본 논문의 내용은 필자 개인의 의견이며, 한국금융연구원의 공식견해가 아님을 미리 밝혀 둔다.

I. 서 론

한국증권거래소(KSE)에 상장되어 있는 KOSPI 200 옵션¹⁾의 거래량은 2002년 5월말까지 현재 일평균 약정수량이 약 6,267천 계약을 기록하고 있으며 일평균 약정대금은 약 4,800억원²⁾을 보이고 있다. 이러한 거래규모는 거래소 시장에 상장된 단일옵션 종목으로 세계 최고수준이다. 또한 지난 5월에는 이자율 선물에 대한 옵션이 상장되었고 올 7월부터는 증권회사에 대해 장외파생상품(OTC) 거래가 허용되었다. 따라서 향후 옵션관련 파생상품시장은 계속 성장할 것으로 예상된다. 또한 외국의 선진 은행들은 옵션가격결정 모형 등을 이용하여 차익거래를 전담하는 조직을 운용하고 있다. 아직 우리나라 옵션시장에 대한 실증적 연구는 현물 및 선물연구에 비해서 충분히 이루어지지 못하고 있을 뿐만 아니라 국내 자료를 이용해 확률변동성 모형에 대한 실증분석이 거의 진행되지 않고 있는 실정이다. 특히, 우리나라 주식시장의 변동성은 미국에 비해 매우 큰 것으로 평가되고 있으며 따라서 미국 시장과 변동성 측면에서 다른 동태적 행태를 보일 가능성이 많다. 이에 본고는 내재 변동성을 통해서 우리나라 주식시장의 변동성에 대한 실증적 연구를하고자 한다.

순간 변동성이 상수인 기초자산의 확률과정이 기하 브라운과정(geometric Brownian motion)일 때 Black-Schoes(1972)의 옵션가격 결정 모형에 의하면 옵션가격과 가치결정모형에 의해 유도되는 내재 변동성은 행사가격대비 기초자산가격 비율 및 만기 등에 상관없이 일정한 상수가 되어야 한다. 하지만 옵션시장에서 Black-Schoes 공식에 따라 계산된 내재 변동성은 moneyness와 만기에 따라 변하는 것으로 보고되고 있다. 특히 내가격(ITM)³⁾ 또는 외가격(OTM)⁴⁾에서는 내재 변동성이 크고 등가격(ATM)⁵⁾에서 내재 변동성이 낮은

1) 이에 대한 자세한 정보는 한국증권거래소 발간 책자인 “알기쉬운 주식옵션거래”(2002)를 참조

2) 증권시장지 2002년 5월 31일을 인용하였다.

3) 내가격(in the money)는 기초자산의 가격이 행사가격보다 높은 경우를 칭한다.

스마일(smile) 현상이 뚜렷하게 나타나고 있다. 미국에서 관측되고 있는 현상을 보면 1987년 Black Monday 이전에는 이처럼 스마일 현상이 관측되다가 그 이후에는 내가격의 내재 변동성은 낮으나 외가격만의 내재 변동성이 큰 소위 찡그림(smirk) 현상이 관측되고 있다. 보통 등가격 옵션의 유동성이 제일 크므로 이를 이용하여 내재 변동성이 구해진다. 하지만 변동성이 일정하다고 보는 Black-Scholes(1972) 모형에 따라 등가격 옵션 자료를 가지고 내재 변동성을 이용해 외가격 또는 내가격 옵션의 가치를 산정하는 것은 옵션의 가격이 스마일 현상으로 인하여 오차를 가질 가능성이 있다. 또한 변동성 자체가 변동하는 것을 인정하는 경우 고정 변동성을 가정하고 만기가 장기인 옵션의 가치를 추정하는 것은 이론적으로 적합성을 갖지 못한다. 또한 Black-Scholes 모형으로 단기물 옵션가격의 내재 변동성을 구하면 변동성이 지나치게 변동하는 것이 관측됨에 따라 Black-Scholes 모형은 만기가 단기인 옵션의 가치를 추정하는 모형으로도 한계를 가진다.

이러한 Black-Schoes 모형의 문제점을 개선하는 방향은 크게 두 가지로 나누어진다. 먼저 Derman-Kani(1994) 등과 같이 옵션가격에서의 스마일 현상을 모형에 적합(calibration)시켜 미래 가격의 확률과정을 추정하고 이를 이용하여 다른 자산의 상대적 가치를 구하는 방법과 Merton(1976), Heston(1993) 및 Bates(1996) 등과 같이 기초자산의 확률과정을 먼저 설정한 후 균형 또는 무차익상태에서의 옵션가치를 유도하는 방법이다. 전자의 경우 연구가 효율적인 알고리즘 개발에 주로 집중되고 있으며 후자의 경우 기초자산의 확률과정, 옵션가치결정 및 옵션가치와 기초자산의 결합확률분포에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있다. 확률과정의 변동성부분에 대한 가정에 따라 옵션모형은 크게 Black-Scholes 모형, Merton(1976) 등의 점프 확산과정(jump diffusion) 모형, Heston(1993) 등의 확률변동성 모형 및 Bates(1996) 등의 일반 변동성(universal volatility) 모형 등으로 구분되며 기초자산의 확률과정에 적절한 제약을 가할 경우 각각의 모형에 대하여 가격결정식이 유도될 수 있다. 특히 Heston(1993)의 확률변동성 모형은 스마일 현상을 설명하

4) 외가격(out of the money)는 기초자산의 가격이 행사가격보다 낮은 경우를 칭한다.

5) 등가격(at the money)는 기초자산의 가격이 행사가격과 같거나 비슷한 경우를 칭한다.

면서도 모형이 단순하다는 장점이 있다. 이에 본 논문은 확률변동성 모형 중 Heston(1993) 모형을 실증분석 모형으로 선택하고자 한다.

최근 옵션가격에 내재되어 있는 가치결정함수를 확률변동성 모형을 이용해 추정하는 방법이 다양하게 제시되고 있다. Pan(2002)은 확률변동성과 점프를 동시에 고려한 모형을 GMM으로 추정하여 점프가 옵션가격의 시계열적 및 횡단면의 행태(the time series behavior of option price)를 설명하는데 중요한 역할을 한다고 보고하였다. Bakshi-Cao-Chen(1997)은 Pan(2002)과 마찬가지로 확률변동성과 점프를 동시에 고려하였다. 그들은 옵션가격의 오차의 제곱을 최소화시키는 방법으로 모수를 추정한 결과 변동성과 점프효과가 옵션 가격을 결정하는데 중요한 역할을 하며, 특히 확률변동성은 가장 좋은 헤징 성과를 보였다고 보고하였다. Benzoni(2001)은 S&P 500 자료를 이용해 확률변동성 모형을 EMM으로 추정한 결과 수익률과 변동성간에는 음(-)의 관계가 있다는 사실을 발견하였다. Chernov-Ghysels(2000)은 S&P 500 옵션의 내재 변동성과 수익률 자료를 가지고 옵션의 가치결정함수를 추정하였다. 이들의 결과에 의하면, 옵션의 가치결정함수 추정시 필요한 모수를 얻기 위해서는 내재 변동성 자료만을 이용한 결과가 수익률과 내재 변동성을 동시에 고려한 것보다 더 유용한 것으로 나타났다.

기초자산의 확률과정을 확률미분방적식(stochastic differential equation, 이하 SDE) 가정할 경우 이를 통계적으로 추정하는 것이 문제가 된다. 연속 확률과정인 확산과정을 통계적으로 추정하는 방법에는 최우추정법(MLE, maximum likelihood estimation), 준최우추정법(QLE, quasi-likelihood estimation), GMM(generalized method of moment), Kalman Filter 및 Gallant-Tauchen(1996)의 EMM(efficient method of moments) 등이 제시되고 있다. 추정하려는 확률과정이 기하 브라운 과정(geometric Brownian motion)처럼 단순한 구조를 갖고 분포함수를 정확히 알 경우 최우추정법이 가장 효율적인 추정방법이 된다. 하지만 확률과정이 평균수렴(mean reverting)하거나 수준효과(level effects)가 있는 경우에 유용한 모형인 제곱근 과정⁶⁾은 그 분포함수가 Bessel 함수 등과 같이 복잡한 형태를 띠게 되므로 최우추정법을 이용하여 모수를 추정하는 것은 매우 어렵게 된다. 이러한

경우 준최우추정법 등을 사용할 수도 있으나 확률과정에 대한 정보를 사용하지 않는 문제를 가지고 있다. 반면 GMM을 사용하기 위해서는 적률(moment) 값을 계산할 수 있어야 하는데 이는 적률의 분포함수에 대한 추가 정보를 요구한다. 반면 EMM은 기본적으로 SME(simulated method of moment)를 사용하여 확률과정을 모의 실험함으로써 모수를 추정하는 방법이다. 구체적으로 Chernov-Ghysels(2000)은 EMM을 이용하여 옵션가치결정식의 모수를 추정한다. 이러한 방법 이외에도 Ait-Sahalia-Lo (1998) 등과 같이 기초자산 및 옵션가격의 통계적 특성을 비모수적으로 파악할 수 있으나 이 경우 관측자료에 과대적합(over fitting)이 발생하는 문제가 생길 수 있다.

본 논문에서는 국내 KOSPI 200 옵션자료를 가지고 기초자산의 확률과정이 Heston(1993)의 확률변동성 모형을 따른다고 가정한 후 EMM을 이용하여 옵션 가격을 계산할 때 필요한 모수를 추정하였다. 즉, 본 논문은 Chernov-Ghysels(2000)과 마찬가지로 내재 변동성 자료를 이용하여 옵션의 가치결정함수를 추정하였다. 비관측 변수인 변동성과 내재 변동성간에 일대일 대응 함수관계가 있을 경우 내재 변동성 자체를 이용하여 가치결정함수를 추정하는 경우에도 비관측 변수인 변동성의 성질을 충분히 규명해 낼 수 있을 것으로 판단된다.

본 논문의 연구결과에 의하면, SNP 모형을 통해 추정한 내재 변동성의 분포(이하 SNP 분포)는 오른쪽 꼬리 부분이 정규분포보다 두껍고, 왼쪽 꼬리 부분은 얇고, 첨도는 정규분포보다 훨씬 높은 것으로 조사되었다. Chernov-Ghysels(2000)의 연구결과에 의하면, S&P 500의 내재 변동성은 SNP 분포의 왼쪽 꼬리는 정규분포보다 더 두꺼우며, 오른쪽 꼬리는 더 얇아 국내 옵션의 내재 변동성과는 다른 결과를 보여주고 있다. 또한 내재 변동성은 평균으로 회귀하려는 경향이 작고, 기초자산의 수익률과 확률변동성간의 관계는 음(-)으로 추정되기는 하지만 그 정도가 극히 작은 것으로 나타났다. 이러한 사실은 내재 변동성이 평균으로 회귀하려는 성향이 강하고, 내재 변동성과 기초자산의 수익률간에 음(-)의 관계가 큰 S&P 500 옵션시장과 다른 결과이다.

6) 재공급 과정에 대한 자세한 내용은 Cox-Ingersoll-Ross(1985)을 참조

본 글은 다음과 같이 구성되어 있다. 제 2 장은 분석대상 옵션가치결정모형으로 Black-Scholes(1972) 및 확률변동성(stochastic volatility) 모형을 검토하였다. 제 3 장은 확률변동성 모형의 추정방법을 검토하였으며, 제 4 장에는 내재변동성의 분포를 SNP 모형으로 추정하고, EMM을 이용해 옵션 가격 결정시 필요한 모수를 추정하고 마지막으로 제 5 장에서 결론을 맺는다.

II. 분석 모형

1. Black-Scholes 모형

확률변동성 모형을 설명하기 전에 먼저 Black-Scholes(1972)의 옵션가격결정모형을 설명할 필요가 있다. 자산가격 S_t 의 확률과정의 평균항(drift) 및 분산항이 각각 상수이면서 μS_t 및 σS_t 로 표현되고 다음식 (1)과 같은 확산과정을 따를 경우를 가정하자. 이 경우 확산과정은 확률미분방정식(stochastic differential equation, 이하 SDE)으로 해석할 수 있으며 이러한 SDE에 대한 해의 존재성은 Oksendal(1998)등에 증명되어 있다.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (1)$$

식 (1)에서 W_t 는 잡음을 나타내는 브라운 과정(Brownian motion)을 나타낸다. 기초자산의 확률과정과 상관없이 행사가격이 K 인 유럽형 만기 T 에서 콜옵션의 수익은 $Max[S_T - K, 0]$ 가 되며 현재시점에서의 콜옵션의 가치를 C 로 나타내면 이는 S_t 의 함수가 된다. 그런데 자산수익률이 확산과정이고 C 가 S_t 에 대해 미분가능하면 이또 보조정리(Ito's lemma)를 C 에 적용할 수 있으며 이 때 전미분(dC)은 옵션보유에 따른 자본손익을 나타낸다. 포트폴리오의 경우 기초자산의 수익률이 식 (1)에 따라 결정될 때 옵션과 기초자산을 동시

에 보유하면서 기초자산의 변동에 따른 옵션가치의 변동비율만큼 기초자산을 보유하는 포트폴리오의 경우 수익률에서 불확실성이 제거될 수 있다. 그러므로 무차익상태에서 포트폴리오의 수익률은 단기 이자율 및 배당률을 각각 상수 r 및 q 로 나타내면 $r - q$ 가 되어야 하며 이를 이용하여 다음과 같은 유럽형 콜 옵션가격 C^{BS} 을 결정하는 편미분 방정식⁷⁾을 유도할 수 있다.

$$C_t^{BS} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 C_{SS}^{BS} + (r - q) S C_S^{BS} = r C^{BS} \quad (2)$$

$$C^{BS}(T, S) = (S_T - K)^+ \quad (3)$$

상기 편미분 방정식을 변수분할법(separations of variable), 푸리에 변환(Fourier transform) 등을 통해 풀면 다음과 같은 Black-Scholes 공식을 구할 수 있다.

$$C^{BS} = S e^{-q\tau} N(d_1) - K e^{-r\tau} N(d_2) \quad (4)$$

여기서

$$d_{\pm} = \frac{X}{\sigma\sqrt{\tau}} \pm \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}$$

$$X = \ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - q)\tau$$

이며, $N(\cdot)$ 는 표준누적정규분포함수(standard normal cumulative distribution function)이다. 누적정규분포함수 $N(\cdot)$ 는 푸리에 적분의 극한값으로 표현될 수 있으며 만기시 콜옵션의 수익은 $(S_T - K)^+ = S_T - \min\{S_T, K\}$ 으로 표현된다. $\sqrt{-1} \equiv i$ 로 나타내면 Black-Scholes 공식이 다음식과 같음을 보일 수 있다.

7) 이하 편미분 또는 상미분 방정식에서 첨자는 미분을 나타낸다.

$$C^{BS}(S_t, \tau, K, r, q) = S_t e^{-q\tau} - \frac{K e^{-r\tau}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(-ik+1/2)X - (k^2+1/4)\sigma^2 T/2}}{(k^2+1/4)} dk \quad (5)$$

하지만 이처럼 편미분 방정식에서 옵션가격결정 공식을 유도하지 않고 Harrison-Kreps(1979)를 이용하면 무차익 상태에서 옵션의 가치를 동등 마팅게일(martingale) 측도⁸⁾를 이용하여 바로 유도할 수 있다. 이때 동등 마팅게일 측도 Q 하에서 자산가격의 수익률의 평균항(drift)은 단기 무위험 이자율이 되고, 마팅게일 측도하에서 기대치인 E^Q 를 이용하면 옵션가격결정 공식은 다음과 같이 표현되며 이는 Black-Scholes 공식과 같음을 보일 수 있다.

$$C = E^Q[e^{-(r-q)\tau} \text{Max}\{S_T - K, 0\}] \quad (6)$$

상기 식에서 동등마팅게일 측도에 따른 밀도함수를 분리하여 생각할 수 있는데 이를 가치결정함수(pricing kernel)라고 한다. 가치결정함수가 알려져 있고 기초자산의 가격과정이 동일하다면 만기시 수익구조가 매우 복잡한 금융상품(예 : exotic option)의 현재가치는 Harrison-Kreps(1979)의 정리를 이용하여 구할 수 있다. 그런데 기초자산이 기하 브라운 과정일 때 가치결정함수는 정규분포를 형성하는 것으로 알려져 있다. Harrison-Kreps(1979)는 일반적인 확산과정 상태에서도 성립하므로 마팅게일을 이용한 가격결정 방법론은 기초자산의 수익률이 브라운 과정을 따르지 않는 경우에도 유용한 방법이 될 수 있다.

8) 다음의 조건을 만족하는 확률 측도(probability measure) $\bar{\pi}$ 를 측도공간 (Q, F) 에서 측도 π 에 대한 동등 마팅게일 측도(equivalent martingale measure)라 한다.

(1) $\bar{\pi}(B)$ iff (if and only if) $\bar{\pi}(B) = 0$ for $B \in F$

(2) 가격 과정은 filtration F_t 및 새로운 측도(measure)에 대하여 마팅게일이다.

이런 동등 마팅게일 측도는 이항 모형의 경우 실제 전개되는 불확실한 확률에 대해, 새로운 확률을 대응시켜 주는 것으로, 이항(binomial) 모형의 위험 중립 확률(risk neutral probability)에 대응한다.

2. 확률변동성 모형

Local volatility 모형은 변동성이 자신의 확률과정을 갖지 않고 단순히 시간의 함수인 반면, 확률변동성 모형은 기초자산뿐만 아니라 변동성도 SDE를 따르는 경우를 말한다. 특히 무위험 이자율(risk-free interest rate)이 R 로 일정하고 분산항이 다음 식 (7)과 같이 제곱근과정을 따르는 경우를 가정할 수 있다⁹⁾.

$$dV_t = \kappa^* (\alpha^* - V_t) dt + \sigma_v \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{V_t} dW_{1t}^* + \sigma_v \rho \sqrt{V_t} dW_{2t}^* \quad (7)$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = R dt + \sqrt{V_t} dW_{1t}^* \quad (8)$$

여기에서 W_{1t}^* 및 W_{2t}^* 는 공분산이 ρ 인 브라운 확률과정이며 수익률의 동태적 특성을 나타내는 식 (8)을 보면 변동성을 나타내는 분산항이 $\sqrt{V_t}$ 이므로 현재의 수익률은 수익률의 변동성에 따라 변하는 특색을 갖는다. 그런데 식 (7)을 보면 변동성의 변동성은 $\sigma_v \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{V_t}$ 가 되므로 변동성이 커지는 경우 변동성의 변동성이 동시에 커지는 경우를 나타낸다. 또한 V_t 는 평균항이 $\kappa^* (\alpha^* - V_t)$ 이므로 장기 평균값인 α^* 에 수렴하려는 경향이 있으며 회귀 조정 속도인 κ^* 가 양의 값을 가질 경우 장기평균으로 회귀하려는 힘이 강하기 때문에 변동성의 집중(clustering) 현상이 나타난다.

확률변동성 모형에서 W_{2t}^* 는 물론이고 W_{1t}^* 에 의해 리스크가 발생한다. 따라서 Black-Scholes 모형과 다르게 헤징을 위해서는 변동성의 변동성(volatility of volatility) 위험을 헤징할 수 있는 자산이 추가로 필요하다. 즉, 기초자산을 이용하여 W_{2t}^* 에서 발생하는 리스크를 헤징하고 추가된 자산으로

9) 분산항이 확산과정일 때 반드시 제곱근 과정을 따르는 경우 뿐만 아니라 일반적인 확산과정을 가정하여도 논의를 전개할 수 있으나 본 글에서는 Heston(1993) 모형만을 논한다. 또한 변동성의 불확실성에 따른 위험에 대한 위험 프리미엄이 유일하게 존재한다면 위험중립하에서와 유사하게 수익률 및 변동성의 변동행태를 기술할 수 있다. 따라서 식 (7)에서 평균항은 단기이자율로 표현될 수 있다.

W_{1t}^* 에서의 리스크를 헤징한다. 만일 이러한 자산이 존재하지 않는다면 시장이 완비(completes)조건을 충족하지 못하는 문제가 발생하며 따라서 헤징을 통한 가격결정이 되지 않는 문제가 발생한다. 일단 이러한 자산이 존재한다고 가정하면 식 (7)과 식 (8)에 이또 보조정리를 적용하고 헤징을 통하여 확률변동성 하에서 유럽형 콜 옵션가격의 결정방정식을 유도할 수 있다. Heston(1993)은 Black-Scholes의 가격결정공식을 이용하여 해를 구하였는데 이는 식 (9)10)에 제시되어 있으며 식 (5)와 유사한 형태를 띄고 있으나 누적 정규분포함수에 해당하는 부분이 확률변동성 효과로 인해서 Π 로 변환되는 특징을 갖는다¹¹⁾. 식 (10)은 Heston 모형의 콜 옵션가격 산출 공식이다.

$$C(S_t, K, V_t, \tau) = S_t \Pi_1(S_t, K, V_t, \tau) - Ke^{-R\tau} \Pi_2(S_t, K, V_t, \tau) \quad (9)$$

10) 여기에서 $\Pi_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty Re \left(\frac{e^{-i\phi \ln K} f_j(S_t, V_t, \tau, \phi)}{i\phi} \right) d\phi$, $j=1,2$ 이다. $j=1$ 에 해당하는 $f_1(S_t, V_t, \tau, \phi)$ 는 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} f_1(S_t, V_t, \tau, \phi) = & \exp(i\phi R\tau - \frac{\theta^*}{\sigma_v^2} \left[2 \ln \left(1 - \frac{[\xi - \kappa^* + (i\phi + 1)\rho\sigma_v](1 - e^{-\xi\tau})}{2\xi} \right) \right] \\ & - \frac{\theta^*}{\sigma_v^2} [\xi - \kappa^* + (i\phi + 1)\rho\sigma_v]\tau + i\phi \ln S_t \\ & + \frac{i\phi(i\phi + 1)(1 - e^{-\xi\tau})V_t}{2\xi - [\xi - \kappa^* + (1 + i\phi)\rho\sigma_v](1 - e^{-\xi\tau})} \end{aligned}$$

여기서, $\xi = \sqrt{[\kappa^* - (1 + i\phi)\rho\sigma_v]^2 - i\phi(i\phi + 1)\sigma_v^2}$ 이다.

$j=2$ 에 해당하는 $f_2(S_t, V_t, \tau, \phi)$ 는 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} f_2(S_t, V_t, \tau, \phi) = & \exp(i\phi R\tau - \frac{\theta^*}{\sigma_v^2} \left[2 \ln \left(1 - \frac{[\psi - \kappa^* + i\phi\rho\sigma_v](1 - e^{-\psi\tau})}{2\psi} \right) \right] \\ & - \frac{\theta^*}{\sigma_v^2} [\psi - \kappa^* + i\phi\rho\sigma_v]\tau + i\phi \ln S_t \\ & + \frac{i\phi(i\phi - 1)(1 - e^{-\psi\tau})V_t}{2\psi - [\psi - \kappa^* + i\phi\rho\sigma_v](1 - e^{-\psi\tau})} \end{aligned}$$

여기서 $\psi = \sqrt{[\kappa^* - i\phi\rho\sigma_v]^2 - i\phi(i\phi - 1)\sigma_v^2}$ 이다.

11) $\theta^* = \kappa^* \alpha^*$ 로 정의하자.

이러한 확률변동성 모형에 따라서 옵션가격이 결정되는 경우 Black-Scholes 공식을 이용하여 계산된 내재 변동성이 스마일 형태를 띠는 것은 수학적으로 증명되어 있다. <그림 1>은 적당한 확률변동성 과정¹²⁾에 대해 기초자산의 가격이 1이고 행사가격을 0.5에서 2까지 변화시켰을 때 Heston 모형에 따라서 먼저 옵션가격을 계산하고 이를 시장가격으로 간주한 후 Black-Scholes 공식을 이용하여 내재 변동성을 계산한 다음 이를 그래프로 그린 것이다. <그림 1>을 보면 내재 변동성과 수익률의 공분산의 절대값이 커지면서 스마일 현상이 사라지는 것을 볼 수 있는데 만약 ρ 가 적당한 크기로 추정된다면 Heston 모형은 시장에서 관측되는 스마일 현상을 잘 설명하는 모형임을 알 수 있다. 그런데 실제 시장 자료를 보면 기초자산의 시계열은 점프 현상이 관측되며 내재 변동성의 경우 점프 현상 및 변동성 집중(volatility clustering) 현상이 관측된다. 또한 내재 변동성의 경우 스마일 현상이 관측된다. 이러한 제반 현상을 Heston 모형이 적절하게 설명할 수 있는가는 실증적으로 증명되어야 할 사안이다. 따라서 Heston 모형을 이용하여 모수를 추정하기 위해서 다음 절에서는 먼저 실증분석 방법을 논한다.

Ⅲ. 확산모형의 추정방법론

1. 최우추정법, Kalman Filter 및 준최우추정법

확산과정(diffusion process)은 마코프 과정 중 특수한 형태이며 마코프 과정에서 성립하는 콜모고로프 후향 방정식은 평균 및 분산항간의 관계로

$$\frac{\partial p(s, y | t, x)}{\partial t} = \mu(x) \frac{\partial}{\partial x} p(s, y | t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(s, y | t, x) \quad (10)$$

12) 확률변동성 모형은 식 (7)과 식(8)이며, $\kappa^* = 6.5$, $\alpha^* = 0.06$, $\sigma_v = 0.7$ 으로 가정했다. ρ 는 0, -0.2, -0.3, -0.5, -0.7으로 설정하였다.

과 같이 구체적으로 표현된다¹³⁾. 여기서 $p(s, y|t, x)$ 는 전이 확률함수(transition probability)이다. 만일 μ 및 σ 가 간단한 형식으로 주어진다면 상기 방정식을 직접 풀어 닫힌 해를 구하거나 또는 수치적으로 풀 수 있다. 일단 방정식이 풀리면 우도함수를 유도하는 것이 가능하므로 우도값을 계산할 수 있으며 모수를 최우추정법을 이용하여 추정할 수 있다. 그런데 제공된 과정의 경우 분포가 비중심(non-central) χ^2 분포를 따르게 되므로 우도값의 계산은 수치적으로 할 경우 계산에 많은 시간이 요구된다. 이러한 문제를 완화하기 위해서 잔차가 정규분포를 따른다는 가정 하에 추정을 하는 준최우추정 방법(QMLE) 또는 SDE를 상태공간(state space)모형으로 전환한 후 Kalman filter를 적용하는 방법이 있다. 그런데 이러한 방법의 경우 실제 확률과정이 정규분포함수를 따르지 않을 경우 유한표본(finite sample)에서 수렴속도가 느릴 수 있으며 실제 추정오차가 매우 커질 수 있는 문제를 가지고 있다.

2. GMM

옵션가격을 이용하여 가치결정함수를 추정하려는 경우에는 옵션가격과 기초자산의 결합분포를 먼저 구한 후 적률을 계산하여야 한다. 하지만 기초자산의 확률과정이 제공된 과정을 따르는 경우에는 결합분포함수를 해석적으로 구하는 것이 매우 난해하고 이를 이용하여 적률을 구하는 것은 더더욱 어렵다. 따라서 Pan(2002)은 기초자산이 AD를 따르는 경우 내재변동성과 기초자산의 결합분포를 구하고 이에 대해 GMM(General Method of Moments)을 적용하였다. 구체적으로 Pan(2002)은 기초자산과 내재변동성의 결합분포는 조건부특성함수(conditional characteristic function, CCF)의 편미분의 미분연산자가 0이 되는 경우 적률이 되는 성질을 이용하여 적률을 계산한다. 그런데 이와 같은 GMM에 의한 추정은 결합분포함수의 형태가 정확히 알려져 있는 경우에 유용하다¹⁴⁾.

13) 이러한 콜모고로프 방정식을 Fokker-Planck 방정식으로 칭하기도 한다.

14) 만일 적률을 해석적으로 계산하지 못하는 경우에도 이를 모의실험할 수 있으며 GMM을 적용할 수 있는데 이를 모의적률화법이라 하며 이때의 추정량은 일치성을

구체적으로 다음과 같이 Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders(1992)는 다양한 모수적(parametric) 단기이자율 모형을 내포하는 일반적인 형태를 띠는 모형을 비제약(unrestricted) 모형으로 가정한 후 GMM을 이용하여 모수를 추정하였다.

$$dr = (\alpha + \beta r)dt + \sigma r^\gamma dW \quad (11)$$

이 비제약(unrestricted) 연속 모형인 모수적(parametric) 단기이자율 과정이 불연속적으로 관측되는 자료를 가지고 실증검증하기 위해서 CKLS(1992)는 식 (11)을 다음과 같이 이산근사하여 GMM으로 모형을 추정하였다.

$$dr_{t+1} = \alpha + \beta r_t + \epsilon_{t+1} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} E[\epsilon_{t+1} | \Phi_t] &= 0 \\ E[\epsilon_{t+1}^2 | \Phi_t] &= \sigma^2 r_t^{2\gamma} \end{aligned} \quad (13)$$

위의 식에서 Φ_t 는 시점 t 에서 이용 가능한 정보집합(information set)이며 추정되어야 할 모수는 $\theta = (\alpha, \beta, \sigma, \gamma)'$ 이다. 이제 이산 근사식 식 (12)과 식 (13)로부터 상수 1 및 r_t 를 도구변수(instrumental variables)로 하여 다음과 같이 $f_t(\theta)$ 를 정의하자.

$$f_t(\theta) = \begin{pmatrix} \epsilon_{t+1} \\ \epsilon_{t+1} r_t \\ \epsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 r_t^{2\gamma} \\ (\epsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 r_t^{2\gamma}) r_t \end{pmatrix} \quad (14)$$

여기서 θ 는 추정해야 할 모수의 집합이다. 만일 근사식이 단기이자율 모형으로서 맞다면 $E[f_t(\theta)] = 0$ 이 되어 모집단의 적률조건(population moment

찾는다.

conditions)이 된다. $f_i(\theta)$ 의 표본평균은 T 개의 관찰치를 이용하여 다음과 같은 모집단의 적률조건에 대응되는 표본적률조건(sample moment conditions)을 구할 수 있다.

$$g_T(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T f_i(\theta) \quad (15)$$

따라서 식 (15)로 제시되어 있는 표본적률조건을 이용해 아래와 같은 GMM의 목적함수를 구성할 수 있다.

$$J_T(\theta) = g_T'(\theta) W_T(\theta) g_T(\theta) \quad (16)$$

여기서 $W_T(\theta)$ 는 가중치를 나타내는 행렬인데 이의 계산방법에 따라 추정치의 분산이 달라진다. Hansen(1982) 등에 의해 W_T 에 대한 여러가지 형태의 최적행렬이 제시되고 있으며 GMM을 추정하기 위해서는 W_T 의 추정이 선행되어야 한다. Hansen(1982)에 의하면

$$W_T(\theta) = \left[\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T f_i(\theta) f_i(\theta)' \right]^{-1} \quad (17)$$

이 된다. 결국 GMM 추정이라는 것은 식 (16)을 최소화 시켜주는 θ 를 찾는 추정방법이다.

3. EMM

EMM(Efficient Method of Moments)은 Gallant-Tauchen(1996)에 의해 제시된 방법으로 대상 확률과정의 분포함수를 준비모수적 방법(SemiNonParametric, 이하 SNP)으로 추정한 후 추정된 분포함수의 스코어함수(score function)의 기대치가 0이 되는 성질을 이용하여 추정하는 방법이

다. 위에서 언급한 GMM과 유사한 방법으로서 EMM에서는 모집단의 적률조건(moment conditions)을 구성할 때 SNP로 추정된 분포의 스코어 함수의 기대치가 0이 되는 성질을 이용한다. 구체적으로 EMM의 내용을 보면 다음과 같다.

가. SNP 모형

먼저 분석 데이터의 진정한 확률밀도함수를 p 라고 할 때, 최우추정법을 이용하여 p 의 추정이 가능하지 않거나 매우 어려울 경우가 있다. 그러나 정규 분포함수를 Hermite 다항 전개로 결합하여 p 를 근사¹⁵⁾할 수 있는데 이 방법을 'SNP를 이용해 분포함수를 추정한다'고 일컫는다. y 를 $M \times 1$ 확률변수벡터, x 를 y 의 과거정보라고 하고, θ 를 모수벡터라 하면, y 의 조건부 확률밀도 함수 $p(y|x, \theta)$ 는 Hermite 다항 전개(polynomial expansion)를 통해 p 에 수렴하는 분포함수 f ¹⁶⁾를 찾을 수 있으며 그 형태는 식 (18)과 같이 주어진다¹⁷⁾.

$$f(y|x, \theta) \propto [H(z, x)]^2 n_M(y|\mu_x, \Sigma) \quad (18)$$

여기서

$$\begin{aligned} \mu_x &= b_0 + \sum_{j=1}^{L_n} B_j x_{t-j} \\ \Sigma &= RR' \\ z &= R^{-1}(y - \mu_x) \end{aligned}$$

이며, $n_M(y|\mu_x, \Sigma)$ 는 M 차원의 가우시안 확률밀도함수(Gaussian probability

15) 여기에서 근사는 Sobolev norm 상에서 이루어지는데 자세한 내용은 Gallant-Tauchen (1989)을 참조

16) 미분가능함수 f 를 따르는 확률과정을 보조모형이라 하자.

17) 식에서 K 는 유한한 근사치를 표현한다.

density function)이다. 여기에서 $H(\cdot, \cdot)$ 는 Hermite 다항 전개로서 K_z 를 차수(lag)로 가지는 함수고 $H(\cdot, \cdot)$ 의 자승은 확률밀도함수를 양수로 만들어 주는데 필요하다. Hermite 다항 전개식은 다음과 같이 주어진다.

$$H(z, x) = \sum_{\alpha=0}^{K_z} \left(\sum_{\beta=0}^{K_z} a_{\beta\alpha} x^\beta \right) z^\alpha \quad (19)$$

분산행렬 Σ 는 GARCH 및 ARCH 효과를 반영하기 위하여 다음과 같이 설정한다.

$$\begin{aligned} \text{vech}(R_{x_{t-1}}) &= \rho_0 + \sum_{i=1}^{L_r} P_i |y_{t-1-L_r+i} - \mu_{x_{t-1-L_r+i}}| \\ &+ \sum_{i=1}^{L_g} \text{diag}(G_i) \text{vech}(R_{x_{t-2-L_r+i}}) \end{aligned} \quad (20)$$

여기서, $\text{vech}(\cdot)$ 은 하방삼각형정방행렬(lower triangular matrix)을 벡터로 만들어 주는 벡터 연산자이다.

SNP 모형은 모형의 조정계수(tuning parameters)에 따라 분포가 결정된다. L_u 는 μ_x 의 시차(lag), L_y 는 GARCH항의 시차, L_r 은 ARCH항의 시차, L_p 는 $H(z, x)$ 에서 x 의 시차, K_z 는 z 의 Hermite 다항식의 차수, K_x 는 x 의 다항식 차수이다. 이중 특히 K_z 는 분포함수가 비모수적 특성을 가질 때, K_x 는 분포함수가 비선형성을 띠는 경우에 유용하다. 따라서 이들 값이 크면 시계열에 비모수적 비선형성이 강한 것으로 해석된다. 관측 자료 집합을 $\{\tilde{y}_t, \tilde{x}_{t-1}\}_{t=1}^T$ 이라 하고, $\tilde{x}_{t-1} = (\tilde{y}_{t-L_r}, \dots, \tilde{y}_{t-1})'$ 라 하면 우도함수는 다음과 같이 정의된다.

$$s_T(\theta) = -\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln f(y_t | x_{t-1}, \theta) \quad (21)$$

따라서 준최우추정량(Quasi-maximum likelihood estimator, QMLE)은 다음과 같이 식 (21)을 극소화 시켜주는 θ 이다.

$$\tilde{\theta}_T = \operatorname{argmin}_{\theta} s_T(\theta) \quad (22)$$

여기서 $\theta = \operatorname{vec}(a_{11}, \dots, a_{KK}, b_0, B_1, \dots, B_L, \rho_0, P_1, \dots, P_L, G_1, \dots, G_L)$ 이며 보조모형 계수(score generator parameters)라 한다.

<표 1>은 조정계수의 조합별로 분포의 형태를 나타내주고 있다. 조정계수(tuning parameters)의 다양한 조합에 의해 추정된 분포중 가장 좋은 적합(fitting)을 보이는 분포는 다음의 BIC(Schwarz's Bayesian information Criterion)를 통해 결정된다.

$$BIC = s_T(\tilde{\theta}_T) + \frac{1}{2} \frac{P_{\theta}}{T} \ln T \quad (23)$$

여기에서 P_{θ} 는 모수의 개수를 의미한다. 따라서 모수의 개수가 늘어나면 BIC 값도 증가하기 때문에 BIC 값이 작으면 분포의 적합이 잘 되었다고 할 수 있다. BIC 조건에 따라 선택된 분포는 EMM의 보조모형(auxiliary model 혹은 score generator)이 되며, 보조모형의 추정은 EMM 추정의 첫 번째 단계가 된다.

나. EMM 추정

첫 번째 단계에서 추정된 SNP 모형의 스코어 함수(score function)를 이용해 EMM을 위한 다음과 같은 표본적률조건을 생성한다.

$$m_N(\rho, \tilde{\theta}_T) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\hat{y}_t(\rho) | \hat{x}_{t-1}(\rho), \tilde{\theta}_T) \quad (24)$$

여기서, \hat{y}_t 는 모의 생성된 자료이고, ρ 는 우리가 관심을 가지고 있는 모수 벡터(parameter vector)이며, N 은 모의 생성된 자료의 개수이다. 비록 직접적으로 진정한 밀도함수 p 에 대한 추정이 불가능할지라도 구조모형(structural model)을 이용한 자료 시뮬레이션(data simulation)은 가능하다¹⁸⁾. ρ (구조모형의 모수)의 함수로 $\{\hat{y}_t\}_{t=1}^N$ 를 생성한 다음 식 (24)에 대입하면 EMM에 사용될 표본적률조건이 구해진다. 그리고 표본적률조건을 이용하면 다음과 같은 EMM 모형을 추정할 수 있다.

$$\hat{\rho} = \operatorname{argmin}_{\rho} m'_N(\rho, \tilde{\theta}_T) W_T(\tilde{\theta}_T) m_N(\rho, \tilde{\theta}_T) \quad (25)$$

여기서, $W_T(\tilde{\theta}_T)$ 는 최적가중행렬(optimal weighting matrix)이며, 다음과 같이 주어진다. 이때 한 가지 주의할 것은 $W_T(\tilde{\theta}_T)$ 이 실제 관측된 자료와 보조모형만의 함수라는 점이다.

$$W_T(\tilde{\theta}_T) = \left\{ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\hat{y}_t | \bar{x}_{t-1}, \tilde{\theta}_T) \right] \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\hat{y}_t | \bar{x}_{t-1}, \tilde{\theta}_T) \right]' \right\}^{-1}$$

결국 EMM은 모의 생성된 자료가 관측된 자료를 가장 잘 묘사할 수 있도록 구조모형의 모수를 찾는 것이다. 즉, 모의 생성된 자료를 구조모형의 모수가 아닌 보조모형의 모수로 미분해서 평가한 다음 스코어가 “0”이 되는 구조모형의 모수를 찾는 것이다.

18) 사실상 EMM 추정의 두 번째 단계는 시뮬레이션된 자료를 생성하는 것이다. 예컨대 우리가 추정하고자 하는 SDE 모형이 다음과 같다고 하자.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

여기서, 구조모형의 모수는 $\rho = (\mu, \sigma)'$ 이다. 즉, 구조모형의 모수인 μ 와 σ 가 주어지면 위의 SDE를 이용해 모의실험된 \hat{S} 를 구할 수 있다.

추정된 $\hat{\rho}$ 를 EMM의 목적함수에 대입하면 목적함수값은 자유도가 $\#(\tilde{\theta}_T) - \#(\hat{\rho})$ 인 χ^2 분포를 따르게 된다. 따라서 χ^2 통계치가 임계치(critical value)보다 작으면 적합이 잘 되었다고 판단할 수 있다.

EMM 추정량의 통계적 성질은 다음과 같음을 Gallant-Tauchen(1996)은 제시하고 있다.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\rho} = \rho_0 \quad \text{a.s.} \quad (26)$$

$$\sqrt{T}(\hat{\rho} - \rho_0) \rightarrow N(0, [M_0' W_0^{-1} M_0]^{-1}) \quad (27)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{M}_T = M_0 \quad (28)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{W}_T = W_0$$

여기에서

$$\begin{aligned} \hat{M}_T &= M(\hat{\rho}, \tilde{\theta}_T) \\ M_0 &= M(\rho_0, \theta_0) \\ M(\rho, \theta) &= \frac{\partial}{\partial \rho'} m_T(\rho, \theta) \\ W_0 &= \text{Var} \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \frac{\partial \ln f_t(\tilde{y}_t | \tilde{x}_t, \theta_0)}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

이며, 하첨자 '0'은 참값(true value)을 의미한다. 이러한 최우추정법이나 비모수적 방법으로 모수를 직접 추정할 때 경우 차원이 n 인 경우 2^n 으로 늘어나는 문제가 있음에 반해서 EMM에 의한 추정방법은 다요인 확률과정을 추정하려는 경우에도 추정공간의 차원이 확장되지 않는 장점이 있다. EMM을 사용하여 확률미분방정식의 모수를 추정한 후 비관측변수와 관측변수간의 함수관계를 모의실험된 자료를 이용하여 파악할 수 있다. 즉 관측자료 및 이의 과거값을 각각 y , x 로 나타내고 비관측자료를 V 라 하면 세 변수의 값들은

확률미분방정식을 통해서 모의실험할 수 있다. 선형회귀(linear regression)을 통해 세 변수간의 관계인 $V=g(y,x)$ 를 추정할 수 있다고 하자. 그러면 모의 실험된 관측자료 y, x 를 실제 관측치 \tilde{y}, \tilde{x} 로 치환하여 비관측변수를 추정(filtering)할 수 있다. Gallant-Tauchen은 이를 재투영(reprojection)으로 칭하고 있다. 이는 GARCH 추정에서 확정적 변동성(deterministic volatility) 모형에서 모수를 추정한 후 이를 이용하여 조건부 분산을 구하는 경우와 유사하다.

다. 옵션가치결정함수 추정에의 응용

식 (7)과 식 (8)로 주어진 확률변동성 모형의 모수 $\kappa^*, \alpha^*, \sigma, \rho$ 는 위에서 언급한 EMM을 이용하여 추정할 수 있다. 궁극적으로 우리가 관심을 갖는 건 옵션의 가치계산이다. 옵션의 가치를 계산하기 위해서는 pricing kernel이나 위험중립확률(risk-neutral probability)이 필요한데 이는 확률변동성 모형의 모수를 추정하면 해결된다. 예컨대, Heston(1993)모형의 경우를 보면, 기초자산의 수익률의 변동성 및 기초자산의 확률과정(stochastic process)이 식 (7)과 식 (8)로 각각 주어질 경우, 이들 식에서 나타나는 모수를 추정해 Heston의 옵션계산공식에 대입하면 옵션의 가격이 계산된다. 문제는 SDE를 구성하고 있는 모수를 위험중립하에서 추정하느냐 아니면 비위험중립하에서 하느냐이다. 만약, 위험중립하에서 모수를 추정하면 추정된 모수를 Heston(1993)의 옵션가격공식에 바로 대입할 수 있지만, 비위험중립하에서 모수를 추정하면 옵션가격공식에 바로 대입해서 쓸 수가 없다.

Chernov-Ghysels(2000)은 S&P 500의 수익률과 옵션가격에 내재된 변동성을 이용해 옵션의 가치결정함수를 추정하는 방법을 제시하고 있다. 이를 구체적으로 보면 다음과 같다.

먼저 식 (7)과 식 (8)로 나타나는 확률변동성 과정을 위험중립하에서 성립하는 SDE로 간주하고 아래의 식 (30)과 식 (31)로 주어진 확률변동성 과정을 비위험중립하에서 성립하는 SDE라 하자.

$$dV_t = \kappa(\alpha - V_t)dt + \sigma_v \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{V_t} dW_{1t} + \sigma_v \rho \sqrt{V_t} dW_{2t} \quad (30)$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_s dt + \sqrt{V_t} dW_{2t} \quad (31)$$

위험 및 비위험하의 SDE의 차이점은 위험중립하에서는 평균(drift)항이 무위험 이자율 R 로 고정된 것이지만, 비위험중립하에서는 평균항이 수익률의 평균으로서 추정해야 모수이다. 내재 변동성 자료를 이용해 모수를 추정하게 되면 위험중립하에서 추정하는 것이 되고, 수익률 자료를 이용해 모수를 추정하게 되면 비위험중립하에서 추정하는 것이 된다. 그러나 위에서 언급한 것처럼 비위험중립하에서 추정하게 되면 이 모수는 옵션가격결정공식에 사용하지 못하기 때문에 수익률 자료를 이용하려면 옵션에 내재된 변동성자료를 가지고 결합분포를 구성한 후 이를 통해 위험중립 및 비위험중립하의 모수를 동시에 추정해야 한다. Chernov-Ghysels(2000)은 내재 변동성만을 이용해 구한 모수를 대입함으로써 옵션가격을 산정한 것과 기초자산의 수익률과 내재 변동성을 동시에 추정한 모수를 옵션가격에 대입해 구한 것을 비교한 결과 내재 변동성만을 이용한 것이 가격 오차(pricing error)와 헤지(hedge) 성과 측면에서 성과가 더 좋다는 결론을 얻었다. Chernov-Ghysels(2000)이 EMM을 이용해 SDE의 모수를 추정한 절차를 구체적으로 살펴보자. 위험중립하에서 추정되는 모수를 $\theta_n = (\alpha^*, \kappa^*)'$ 로, 비위험중립하에서 추정되는 모수를 $\theta_o = (\alpha, \kappa)'$ 로 정의하고, 공통으로 추정되는 모수를 $\theta_c = (\sigma_v, \rho)'$ 로 정의하자.

제 1 단계 : SNP 모형을 이용해 추가수익률과 옵션가격에 내재된 변동성의 결합분포 $f(y_t | I_t, \theta)$ 를 구한다. y_t 는 식 (32)로 주어졌다.

$$y_t = (\ln S_t - \ln S_{t-1}, \ln \sigma_t^{BS})' \quad (32)$$

여기서, I_t 는 t 시점까지의 정보집합(information set)을, θ 는 모수를, S_t 는 S&P지수를, $\ln \sigma_t^{BS}$ 는 Black-Scholes 옵션공식을 이용해 구한 내재변동성을 나

타낸다. 즉, $f(y_t | I_t, \theta)$ 를 추정하기 위하여 $x_{t-1} = (y'_{t-L}, \dots, y'_{t-1})'$ 를 y_t 의 L 시차 떨어진 과거정보로 정의하고 밀도함수 $f(y_t | x_{t-1}, \theta)$ 를 추정한다.

제 2 단계 : 모수 (θ_n, θ_c) 을 가지고 식 (30)으로부터 \hat{v}_t 를 모의 생성한다. 모의 생성된 \hat{v}_t 와 μ_s 를 식 (31)에 대입해 \hat{S}_t 을 모의 생성한다. 모의 생성된 \hat{S}_t 와 (θ_n, θ_c) 를 Heston(1993)의 옵션가격결정공식에 대입해 옵션가격(C^H)을 계산한다. Heston 공식을 이용해 옵션가격을 결정하기 위해서는 행사가격과 잔존만기도 모의 생성해야 한다. Chernov-Ghysels(2000)은 관측된 옵션자료의 행사가격과 잔존만기를 재사용(cycle)함으로써 모의 생성하였다. 예컨대, 관측된 자료가 1000개인데 모의 생성을 10000개 한다고 가정하면, 처음 1000개의 모의 생성된 자료에는 1000개의 관측된 자료의 행사가격과 잔존만기를 순서대로 대응시켜 주고, 다음 1000개의 모의 생성된 자료에는 다시 1000개의 관측된 자료의 행사가격과 잔존만기를 대응시켜 준다. 그러나 이러한 대응방법을 통해 구한 내재 변동성은 관측된 내재 변동성 자료의 특성을 위배할 가능성이 있다. 예컨대, 관측된 확률과정의 평균항에 크면 관측된 자료는 추세를 가지게 되며 관측된 횟수이상으로 모의 실험을 하면 관측 자료는 내가격 옵션에서 구한 내재 변동성인데, 모의 생성된 내재 변동성은 내가격 옵션에서 구한 것이 아닐 수도 있기 때문이다. 따라서 본 논문에서는 Chernov-Ghysels(2000)의 이러한 단점을 극복하기 위해서 행사가격 자체를 모의 생성하지 않고 moneyness을 위에서 언급한 재사용(cycle) 방법에 따라 모의 생성함으로써 관측된 내재 변동성 자료와 모의 생성된 내재 변동성 자료가 일관성(consistency)를 갖게 했다.

제 3 단계 : 제 2 단계에서 모의 생성된 \hat{S}_t , 행사가격 및 잔존만기를 Black-Scholes모형에 대입해 BS 옵션가격(C^{BS})을 계산한 후 다음과 같은 방법을 통해 내재 변동성을 모의 생성한다.

$$\hat{\sigma}^{BS} = \operatorname{argmin}_{\sigma} | C^H(\hat{S}, \hat{K}, \hat{\tau}, \mu_s, \theta_n, \theta_c) - C^{BS}(\hat{S}, \hat{K}, \hat{\tau}, \sigma^{BS}) | \quad (33)$$

제 4 단계 : 제 3 단계에서 모의 생성된 내재 변동성을 이용해 식 (24)의 표본적률조건을 생성하여 식 (25)를 통해 EMM를 실시한다. 즉 제 3단계에서 모의실험된 내재 변동성의 SNP를 제 1단계에서 구한 SNP와 거리(metric)를 최소화시켜주는 모수를 구한다.

관측된 옵션의 내재 변동성만을 이용해 (θ_n, θ_c) 만을 추정할 경우에는 제 2 단계에서 s_t 를 모의 생성할 때 식 (30)과 식 (31)로부터 생성하지 않고, (θ_n, θ_c) 을 가지고 식 (7)과 식 (8)로부터 생성하면 된다.

위에서 언급한 것처럼 Chernov-Ghysels(2000)은 가격 오차(pricing error)와 헤지(hedge)의 관점에서 보았을 때 옵션 가격을 계산하는데 필요한 정보를 추출하기 위해서는 내재 변동성 하나만으로도 충분하다는 결론을 내렸다. 따라서, 본 논문에서도 Chernov-Ghysels(2000)의 결론을 받아들여 옵션에 내재된 변동성 자료만을 이용하여 위험중립하의 모수를 추정하겠다.

IV. 실증분석

1. 자료 및 기초통계량

본 논문에서 쓰인 콜 옵션 자료는 한국증권거래소(Korea Stock Exchange, 이하 KSE)에서 구했다. 기간은 1999년 1월 4일부터 2002년 4월 30일까지의 일일자료(daily data)로서 총 816개이다. 매일마다 moneyness가 1에 가장 가까운 옵션을 등가격(at-the-money) 옵션으로 간주하였다.

옵션은 선물(futures)과는 달리 매월 만기가 도래한다. 따라서 연속성을 위해 옵션자료를 매월 이월시키는 작업이 필요하다. 옵션계약은 만기가 도래함에 따라 옵션 가격의 움직임이 비정상적으로 움직이는 만기효과가 존재할 가능성이 있어 본 논문에서는 잔존만기가 7일 이하이면 그 다음달이 만기인 옵션

선계약을 이용하여 자료의 연속성을 유지하였다. 내재 변동성자료를 얻기 위해서 이자율은 KSE에서 제공하는 CD90일몰을 이용하였으며, 배당금(dividend)은 없다고 가정하였다.

<표 2>에는 수익률 및 내재 변동성의 기초통계량이 제시되어 있다. KOSPI 200 수익률의 경우 자기상관계수가 통계적으로 모두 0으로 추정되어 매우 안정적 시계열(stationary time series)인 것으로 나타났다. σ_t^{BS} 와 $\sqrt{(\sigma_t^{BS} - \mu)^2}$ 의 자기상관계수를 보면 시차 10까지 모두 통계적으로 유의한 값이 나와 내재 변동성 분포에는 VAR과 ARCH 효과가 존재할 가능성이 많다. 시계열이 안정적이면 통상적으로 자기상관계수가 0으로 빨리 수렴한다. 그러나 <표 2>에서 주어진 자기상관계수는 시차 10까지도 상당히 높은 값을 유지하고 있어 ADF 방법을 통해 단위근 검정(unit root test)을 실시하였다. 단위근 검정 결과 1% 유의수준에서 “단위근이 있다”는 귀무가설을 기각함으로써 두 시계열 모두 안정적인 것으로 나타났지만, 임계치와 가까운 값을 갖는 것으로 보아 불안정적 시계열의 특성도 보여주고 있다.

<그림 2>는 수익률의 추이, 평균이 제거된 내재 변동성(B)의 추이 및 SNP 모형으로 추정된 분포(C)를 보여주고 있다. (B)를 보면 내재 변동성은 전체적으로 시간이 지나면서 하락하는 경향을 보여주고 있는데 이는 1997년 외환 위기를 벗어나면서 시장이 점점 안정세를 찾아가는 과정이기 때문이다. 그러나 2001년 1월 이후에도 내재 변동성이 20%-40%사이에서 움직여 시장이 여전히 불안정하다는 걸 알 수 있다. (C)에서 실선은 SNP 모형으로 추정된 분포(이하 SNP 분포)를 나타내며, 점선은 SNP 분포와 평균 및 분산이 갖는 정규분포(normal distribution)를 나타낸다. SNP 분포는 정규분포보다 오른쪽의 꼬리가 더 두꺼워 오른쪽으로 치우쳐(right skewed) 있는 모습으로 나타났다. 왼쪽 꼬리는 정규분포보다 두께가 작아 오른쪽 꼬리와 비대칭적(asymmetric)인 것으로 조사되었다. 이러한 사실은 Chernov-Ghysels(2000)이 조사했던 S&P 500의 내재 변동성과는 다른 결과이다. 즉, Chernov-Ghysels(2000)에 의하면, S&P 500의 내재 변동성은 정규분포보다 왼쪽의 꼬리가 더 두껍고, 오른쪽의 꼬리는 더 얇다. 이러한 사실로부터 KOSPI 200 시장이 S&P 500 시장보다 변동성이 더 심하다는 것을 알 수 있

다.

2. 추정결과

가. SNP 분포 추정결과

수익률 및 내재 변동성의 결합분포를 일반적인 kernel 방법을 이용하여 추정할 수 있지만, EMM을 이용하기 위해서는 Gallent-Tauchen(1007)이 제시하는 방법에 따라 SNP로 추정할 필요가 있다. 이때 옵션가격결정시 필요한 모수를 추정하기 위해서 수익률 및 내재 변동성으로 구성된 결합분포가 유용한지 아니면 내재 변동성만으로 충분한지는 실증적으로 규명되어야 할 문제이다. Chernov-Ghysels(2000)은 내재 변동성만을 이용해 구한 모수가 결합분포를 이용해 구한 모수보다 더 유용한 것으로 보고했다. 따라서 본 논문에서도 Chernov-Ghysels(2000)의 연구결과를 받아들여 국내 KOSPI 200 옵션 시장의 내재 변동성만을 이용해 모수를 추정하였다.

수익률과 내재 변동성에 대한 SNP 추정결과가 <표 3>에 제시되어 있다. SNP 분포의 모수를 설명하기 보다는 조정계수(tunning parameters) L_u, L_d, L_n, K_1 및 K_2 를 중심으로 설명하겠다. 식 (21)을 $\hat{\theta}_T$ 로 평가한 최소화된 우도함수값 $s_T(\hat{\theta}_T)$ 와 모형 선택의 기준이 되는 BIC(Schwarz Bayes Information Criterion)가 제시되어 있다. BIC를 기준으로 가장 적합이 잘된 모형은 굵은 글씨로 구별하였다. 수익률의 SNP 분포를 보면, AR(1) 및 ARCH 효과가 상당히 큰 것으로 나타났다. 특히 GARCH항을 분포에 도입하니까 BIC가 급격히 증가하는 것으로 보아 국내 KOSPI 200 수익률에는 GARCH 효과가 없는 것으로 보인다. 내재 변동성의 경우 수익률과는 다르게 $L_u=1$ 보다 $L_u=2$ 가 BIC 기준으로 더 선호되는 경향이 있어 내재 변동성 자료에는 AR(2)의 성격이 내포되어 있는 것으로 조사되었다. 한편, ARCH항의 시차 L_1 이 너무 크거나 너무 작으면 BIC가 상승하여 모형의 적합이 악화되는 것으로 조사되었다. $K_1=1$ 인 경우는 전체적으로 BIC값이 높게 나와 내

재 변동성 분포에는 비선형성(nonlinearity)이 없는 것으로 나타났다. 한편, GARCH 효과를 모형에 도입하면 $s_T(\hat{\theta}_T)$ 와 BIC 모두 상승하는 것으로 보아 내재 변동성에도 수익률과 마찬가지로 GARCH 효과가 없는 것으로 판단된다¹⁹⁾. 따라서 본 논문에서 BIC 기준으로 선택한 SNP 분포는 ($L_u = 2, L_g = 0, L_r = 6, L_p = 1, K_1 = 6, K_2 = 0$)으로서 준모수적, AR 및 ARCH효과를 고려한 분포이다. <그림 2>는 SNP 분포의 모양을 보여주고 있다. 일반적으로 수익률의 경우에는 분포의 꼬리가 왼쪽으로 치우치며(left skewed) 꼬리가 정규분포보다 두꺼운 현상(leptokurtic)을 발견할 수 있지만, 내재 변동성의 경우에는 수익률과는 다르게 꼬리가 오른쪽으로 치우쳐있고, 변동성이 높은 경우에는 정규분포보다 꼬리가 두꺼우며, 낮은 경우에는 얇은 것으로 나타났다. 따라서 국내 옵션의 내재변동성은 왼쪽 꼬리는 정규분포보다 두꺼우며, 오른쪽 꼬리는 두꺼운 S&P 500의 내재 변동성과는 다른 분포 형태를 보여주고 있다.

나. EMM 추정결과

앞 절에서 SNP에 의해 내재 변동성의 분포함수가 추정되었으며 추정된 SNP는 미국에서 관측되는 현상과 차이가 많음을 알 수 있었다. 이제 이러한 분포함수의 특성이 구체적으로 위험 중립하에서 모수에 어떻게 영향을 미치는지를 보자. 구체적으로 일정한 모수하에서 KSE 200의 확률 변동성 모형을 모의실험한 값으로 내재 변동성을 계산한 후 이의 분포함수를 SNP로 추정한 후 모의실험 하에서 추정된 SNP와 전 절에서 추정된 SNP와 비교함으로써 최적의 모수를 찾아낸다.

<표 4>에는 Heston의 확률변동성 모형에 대한 EMM 추정결과가 제시되어 있다. 모의 생성된 자료는 3,000개이다($N=3,000$). χ^2 값이 2190.184로 나와 내재 변동성 자료를 이용한 Heston의 확률변동성 모형은 자료 적합(data

19) Gallent-Tauchen이 코딩한 Fortran으로 SNP를 추정할 때 GARCH 효과를 도입하면 추정이 잘 안되는 경향이 있다. 따라서 이러한 불안정성을 줄이기 위해 Gallent-Tauchen은 GARCH 효과를 도입할 경우 $L_g = 1$ 과 $L_r = 1$ 로 할 것을 추천하고 있다.

fitting) 측면에서는 유용하지 않는 것으로 나타났다. 평균으로 회귀 속도를 나타내는 κ^* 는 0.0459로 나와 내재 변동성은 평균으로 회귀하려는 경향이 거의 없는 것으로 조사되었다. 이러한 사실은 <표 2>에서 제시한 내재 변동성의 자기상관계수 및 단위근 검정을 통해 유추해 볼 수 있다. Pan(2002)는 κ^* 를 7.1로, Bakshi-Cao-Chen(1997)는 1.15로 추정해 S&P 500의 내재 변동성은 평균으로 회귀하려는 경향이 강한 것으로 나타났다. 이러한 사실로 미루어 보아 국내 옵션 시장이 미국의 S&P 500 옵션 시장보다 훨씬 불안정하다는 것을 알 수 있다. ρ 가 -0.0012로 추정되어 수익률과 내재 변동성간의 음(-)의 관계는 미약한 것으로 조사되어 국내 옵션시장에서는 레버리지 효과(leverage effect)가 거의 존재하지 않는 것으로 나타났다. 내재 변동성은 불안정적 시계열에 가깝고 수익률은 안정적 시계열이라는 사실로부터 ρ 가 작은 값을 가질 것임을 유추해 볼 수 있다. 반면, Pan(2002)과 Bakshi-Cao-Chen(1997)는 ρ 를 -0.5보다 작게 추정하여 S&P 500에서는 레버리지 효과가 큰 것으로 나타났다. 이론적으로 α^* 는 내재 변동성의 장기평균을 의미한다. 국내 옵션 시장의 장기 평균은 거의 100%에 가깝게 추정되어 상당히 높은 것으로 나타났다.

V. 결론

지금까지 본 논문은 국내 옵션의 내재 변동성을 이용하여 Heston의 확률변동성 모형을 추정하였다. 내재 변동성의 SNP 분포 추정결과 AR(2) 및 ARCH 효과가 분포에 내재 되어있는 것으로 나타났다. 또한 정규분포보다 첨도가 훨씬 크며, 왼쪽 꼬리는 정규분포보다 작으며, 오른쪽 꼬리는 더 두꺼운 특징을 보여주고 있다. 따라서 국내 옵션의 내재변동성은 왼쪽 꼬리는 정규분포다 두꺼우며, 오른쪽 꼬리는 두꺼운 S&P 500의 내재 변동성과는 다른 분포 형태를 보여주고 있다. 확률변동성 모형은 적합성 측면에서 유용하지 않다는 결론을 얻었다. 내재 변동성은 평균으로 회귀하려는 성향이 거의 없어 비정상 시계열에 가까운 것을 알 수 있었으며, 이러한 사실은 평균 회귀

성향이 강한 S&P 500의 내재 변동성과는 다른 동태적 행태(dynamic behavior)를 보여주고 있다. 또한 내재 변동성과 수익률간의 관계가 음(-)으로 추정되긴 했지만 크기가 작아 국내 옵션시장에서는 레버리지 효과(leverage effect)가 미미한 것으로 나타났다. 이러한 실증적 결론이 강하게 뒷받침되기 위해서는 다양한 확률과정에 따른 모형의 적합성에 대한 검토가 추가로 필요하나 확률변동성 모형 및 Heston 모형에 따른 위험중립 하에서 추정된 모수는 우리에게 국내 옵션시장의 특색을 어느 정도 제공하는 것으로 판단된다.

본 논문은 모형의 성과를 측정하지 않았다. 예컨대, Heston 옵션가격결정 모형과 Black-Scholes모형중 어느 모형이 국내 옵션시장에 더 유용한지는 앞으로 헤징성과 등을 통해서 실증적으로 분석해야 할 과제이다. 또한 <그림 2>에서 볼 수 있는 것처럼 내재 변동성은 비교적 자주 점프현상이 관측된다. 따라서 Pan(2002)과 Bakshi-Cao-Chen(1997)가 했던 것처럼 국내 옵션시장분석에서도 이러한 점프현상을 고려하면 훨씬 더 좋은 연구결과를 얻을 수 있을 것으로 기대된다.

<표 1> 조정계수의 조합에 따른 분포

조정계수의 조합	$\{y_t\}$ 의 분포
$L_u = 0 \quad L_y = 0 \quad L_r = 0 \quad L_p \geq 1 \quad K_z = 0 \quad K_x = 0$	iid Gaussian
$L_u > 0 \quad L_y = 0 \quad L_r = 0 \quad L_p \geq 1 \quad K_z = 0 \quad K_x = 0$	Gaussian VAR
$L_u > 0 \quad L_y = 0 \quad L_r = 0 \quad L_p \geq 1 \quad K_z > 0 \quad K_x = 0$	Semiparameteric VAR
$L_u \geq 0 \quad L_y = 0 \quad L_r > 0 \quad L_p \geq 1 \quad K_z = 0 \quad K_x = 0$	Gaussian ARCH
$L_u \geq 0 \quad L_y = 0 \quad L_r > 0 \quad L_p \geq 1 \quad K_z > 0 \quad K_x = 0$	Semiparameteric ARCH
$L_u \geq 0 \quad L_y > 0 \quad L_r > 0 \quad L_p \geq 1 \quad K_z = 0 \quad K_x = 0$	Gaussian GARCH
$L_u \geq 0 \quad L_y > 0 \quad L_r > 0 \quad L_p \geq 1 \quad K_z > 0 \quad K_x = 0$	Semiparameteric GARCH
$L_u \geq 0 \quad L_y \geq 0 \quad L_r \geq 0 \quad L_p \geq 1 \quad K_z > 0 \quad K_x > 0$	Nonlinear nonparameteric

L_u 는 μ_x 의 시차(lag), L_y 는 GARCH항의 시차, L_r 은 ARCH항의 시차, L_p 는 $H(z, x)$ 에서 x 의 시차, K_z 는 z 의 Hermite 다항식의 차수, K_x 는 x 의 다항식 차수이다.

<표 2> 수익률 및 내재 변동성의 기초통계량

	r_t	$\sqrt{(r_t - \mu_r)^2}$	σ_t^{BS}	$\sqrt{(\sigma_t^{BS} - \mu_\sigma)^2}$
평균	0.60	0.09	41.0	9.00
표준편차	2.60	0.02	12.0	8.00
최대값	8.42	0.13	132	91.0
3/4 분위수	1.49	0.03	48.0	13.0
중앙값	0.06	0.01	41.0	7.00
1/4 분위수	-1.48	0.01	34.0	3.00
최소값	-12.7	0.00	13.0	0.00
ρ_1	-0.05	0.02	0.79*	0.57*
ρ_2	-0.04	0.09*	0.75*	0.51*
ρ_3	0.00	0.07*	0.70*	0.41*
ρ_4	-0.04	0.04	0.71*	0.46*
ρ_5	0.01	0.05	0.69*	0.43*
ρ_6	-0.00	0.03	0.66*	0.37*
ρ_7	0.03	0.05	0.62*	0.31*
ρ_8	0.01	0.08*	0.61*	0.31*
ρ_9	-0.01	0.09	0.62*	0.33*
ρ_{10}	-0.01	0.01	0.59*	0.28*
ADF	-13.7	-10.8	-4.03	-5.78

평균부터 최소값까지의 단위는 모든 통계값의 단위는 %이다. r_t 는 KOSPI 200 수익률($\ln S_t - \ln S_{t-1}$)이며, μ_r 는 r_t 의 평균, σ_t^{BS} 는 Black-Scholes 모형에서 구한 내재 변동성, μ_σ 는 σ_t^{BS} 의 평균이다. $\rho_1 \sim \rho_{10}$ 까지는 자기상관계수 (autocorrelation)이며, 별표(*)가 표시되어 있으면 통계적으로 0인 아니다. 자기상관계수의 표준오차범위는 $\pm 2/\sqrt{T}$ 로 계산하였다. ADF는 단위근 검정 통계치이며, 1% 유의수준에서 임계치는 -3.44, 5%는 -2.87, 10%는 -2.57이다. 단위근 검정에서 귀무가설은 "단위근이 있다"이다.

<표 3> 수익률 및 내재 변동성의 SNP 분포 추정

	L_x	L_y	L_r	L_p	K_x	K_z	s_T	BIC	
수익률	1	0	4	1	4	0	1.2665	1.2807	
	1	0	1	1	6	0	1.3077	1.3205	
	1	0	6	1	6	0	1.2313	1.2505	
	1	0	11	1	6	0	1.2181	1.2437	
	2	0	4	1	4	0	1.2485	1.2639	
	2	0	1	1	6	0	1.3073	1.3214	
	2	0	6	1	6	0	1.2301	1.2507	
	2	0	11	1	6	0	1.2173	1.2442	
	1	0	4	1	4	1	1.2499	1.2705	
	1	0	1	1	6	1	1.3064	1.3282	
	1	0	6	1	6	1	1.2304	1.2586	
	2	0	4	1	4	1	1.2473	1.2704	
	2	0	1	1	6	1	1.3060	1.3291	
	2	0	6	1	6	1	1.2401	1.2696	
	1	1	1	1	1	6	0	2.1015	2.1156
	내재 변동성	1	0	4	1	4	0	0.5682	0.6147
1		0	1	1	6	0	0.5833	0.6255	
1		0	6	1	6	0	0.5531	0.6164	
1		0	11	1	6	0	0.5445	0.6290	
1		0	1	1	0	0	0.6686	0.6855	
2		0	4	1	4	0	0.5243	0.5750	
2		0	1	1	6	0	0.5611	0.6033	
2		0	6	1	6	0	0.5034	0.5710	
2		0	11	1	6	0	0.4956	0.5843	
2		0	1	1	0	0	0.6394	0.6605	
1		0	4	1	4	1	0.5484	0.6159	
1		0	1	1	6	1	0.5684	0.6402	
1		0	6	1	6	1	0.5348	0.6277	
2		0	4	1	4	1	0.5121	0.5839	
2		0	1	1	6	1	0.6912	0.7672	
2		0	6	1	6	1	0.6788	0.7759	
2	1	1	1	0	0	0.5937	0.6190		
1	1	1	1	0	0	0.6338	0.6550		
1	1	1	1	6	0	0.5612	0.6076		
1	1	1	1	6	1	0.5451	0.6211		
2	1	1	1	6	1	0.5451	0.6211		
1	1	1	1	1	0	0.6055	0.6308		

s_T 는 식 (21)를 추정된 모수로 평가한 값이다. BIC(Schwarz Bayes information)기준으로 가장 적합이 잘 된 모형은 굵은 글씨로 표시해 두었다.

<표 4> EMM 추정결과

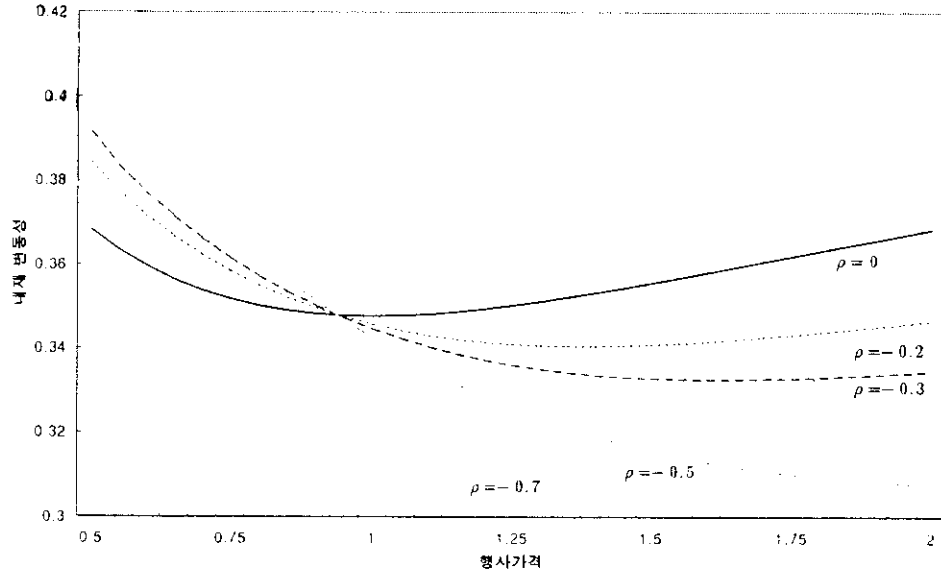
κ^*	α^*	σ_v	ρ	χ^2 통계량
0.0459	0.9995	0.0998	-0.0012	2339.57
(5.2145)	(54.689)	(6.2989)	(-0.032)	

추정된 확률변동성 모형은 다음과 같다.

$$dV_t = \kappa^*(\alpha^* - V_t)dt + \sigma_v \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{V_t} dW_{1t}^* + \sigma_v \rho \sqrt{V_t} dW_{2t}^*$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = Rdt + \sqrt{V_t} dW_{3t}^*$$

위의 확률변동성 모형은 위험중립세계에서 정의되었다. 사용된 자료는 Black-Scholes 모형으로 구한 내재 변동성이다. 괄호속의 숫자는 추정된 모수의 t -값이다.

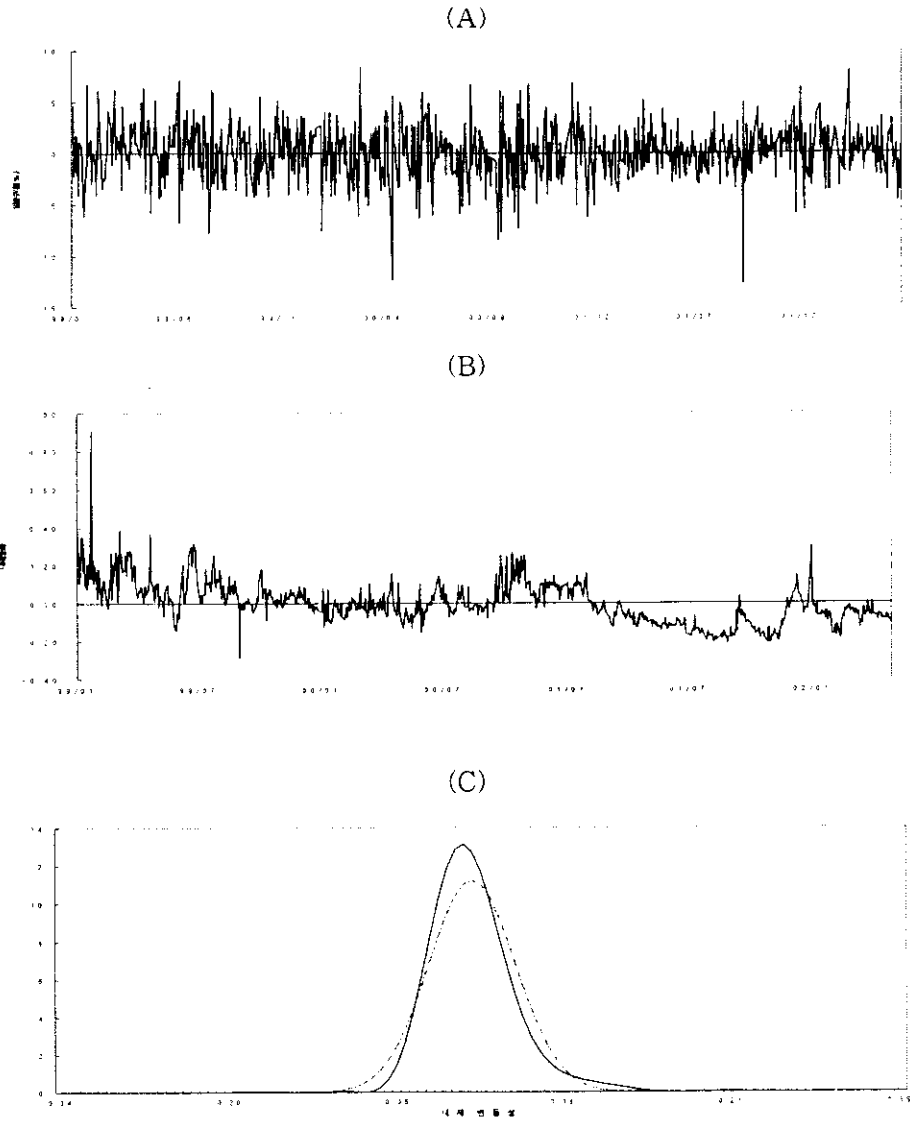


<그림 1> ρ 값에 따른 Heston 옵션공식의 내재 변동성 형태

확률변동성 모형은 식 (7)과 식(8)이며 옵션 공식은 식 (10)이다.

$\kappa^* = 6.5$, $\alpha^* = 0.06\sigma_v = 0.7$ 으로 가정했으며, ρ 는 0, -0.2, -0.3, -0.5, -0.7으로 설정하였다.

$\rho = 0$ 일 경우 내재 변동성에서 스마일 현상이 뚜렷하게 나타나며, ρ 값이 작아짐에 정그림(smirk) 현상이 나타남을 알 수 있다. 따라서 변동성 스마일 현상을 실증적으로 설명하기 위해서는 ρ 값이 0에 가까울 필요가 있다.



<그림 2> 내재 변동성의 추이와 SNP 분포

(A)는 KOSPI200 수익률의 추이, (B)는 평균이 제거된 내재 변동성 추이, (C)는 SNP 분포를 나타낸다. 자료는 일별이며, 기간은 1999년 1월 4일부터 2002년 4월 30일까지이다. (C)에서 실선은 SNP 분포이며, 점선은 SNP 분포와 평균 및 분산이 같은 정규분포이다. 그림에서 보듯이 내재 변동성의 분포함수는 첨도(kurtosis)가 크므로 분포의 꼬리가 두꺼우며, 특히, 양의 왜도(skewness)를 가지므로 인해 분포의 우측의 꼬리가 두껍다. 따라서 내재 변동성이 급격하게 커지는 현상이 많이 관측된다.

참고문헌

- Ait-Sahalia, Y., Lo, A., (1998) "Non-Parametric Estimation of State-price Densities implicit in Financial Prices," *Journal of Finance* 53, 499-548.
- Bakshi, G., C. Cao and Z. Chen (1997) "Empirical Performance of alternative option pricing models", *Journal of Finance*, 52, 2003-49
- Bates, D.S., (1996) "Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes implicit in Deutsche Mark Options," *Review of Financial Studies*, 69-107
- Benzoni. Luca(2001), "Pricing Options under Stochastic Volatility: An Empirical Investigation", mimeo
- Chan, K., A. Karoli, F. Longstaff and A. Sanders, (1992) "An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short Term Interest Rate," *Journal of Finance*, July, 1209 - 1226
- Chernov, M., E. Ghysels, (2000) "A Study Toward a Unified Approach to the Joint Estimation of Objective and Risk Neutral Measures for the Purpose of Options Valuation," *Journal of Financial Economics* 56, 407-458
- Cox, J., Ingersoll, J., Ross, S., (1985) "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica* 53, 385-408.
- Derman, E., I Kani, (1994), "Riding on a Smile", *Risk* 7, 32-39
- Duffie D., and K. Singleton, (1993) "Simulated Moment Estimation of Markov Process Models of Asset Prices," *Econometrica*, 61, 929-953
- Duffie, D., Pan, J., Singleton, K., (1998) "Transform Analysis and Option Pricing for Affine Jump diffusions," *Econometrica*, forthcoming.

- Duffie, D., Pan, J., Singleton, K., (2000) "Transform Analysis and Asset Pricing for a Affine Jump Diffusions," *Econometrica*, 68, 1342-1376
- Gallant, A.R., Tauchen, G., (1989) "Seminonparametric Estimation of Conditionally Constrained Heterogeneous Processes: Asset Pricing Applications," *Econometrica* 57, 1091-1120.
- Gallant, A.R., Tauchen, G., (1996) "Which Moments to Match?" *Econometric Theory* 12, 657-681.
- Gallant, A.R., Hsieh, D., Tauchen, G., (1997) "Estimation of Stochastic Volatility Models with Diagnostics," *Journal of Econometrics* 81, 159-192.
- Hansen, L., (1982) "Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators," *Econometrica* 50, 1029-1054.
- Harrison, M., Kreps, D., (1979) "Martingales and Arbitrage in Multi-period Securities Markets," *Journal of Economic Theory* 20, 381-408.
- Heston, S.L., (1993) "A Closed-form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options," *Review of Financial Studies* 6, 327-343.
- Merton, R., (1976) "Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous," *Journal of Financial Economics*, 3, 125-144
- Oksendal(1998), "Stochastic Differential Equations : An introduction with Applications", Springer, 5th ed.
- Pan, J., (2002) "The Jump Risk Premia Implicit Evidence from an Integrated Time Series Study," *Journal of Financial Studies*, 63, 3-50