



1차원 공간위의 약한 충격파를 포함하는 리만문제 해결

Resolution of Riemann problem for weak shock in one space dimension

연구책임자: 강문진 | 소속학과: 수리과학과 | 홈페이지: <https://sites.google.com/site/moonjinkang81/>

압축성 유체의 흐름에서 발생하는 충격파의 안정성에 관한 오래된 미해결 난제인 리만문제의 중요한 부분을 최초로 해결하였다. 구체적으로 다음과 같이 기술되는 추측의 중요한 부분을 해결하였다. 1차원 공간 위에서 정의된 압축성 오일러 방정식의 특이점으로 서로 다른 두 개의 상수상태를 평면 불연속으로 연결하는 약한 충격파가 물리적 섭동에 의하여 대역적으로 안정적임을 나비에-스토크스 방정식의 비점성 극한들의 집합 위에서 증명하였다. 이를 위해 다양한 편미분 방정식 모델에 적용 가능한 혁신적이고 강력한 해석적 방법론을 개발하였다.

1. 연구배경

1752년에 오일러(Euler)에 의해 최초로 유도된 압축성 오일러 방정식은 압축성 비점성(invscid) 유체의 역학을 기술하는 가장 유명한 비선형 편미분 방정식으로써 다양한 분야에서 광범위하게 사용돼 왔다. 압축성 오일러 방정식의 가장 중요한 특징은 충격파(shock)라는 특이한 해를 갖는 것이다. 이 특이점의 불연속성과 비가역성에 의해 충격파는 난해한 연구 대상이고, 19세기 중반에 이르러서야 리만(Riemann)에 의해 수학적으로 엄밀하게 연구되기 시작했다. 리만에 의해 제시된 충격파를 포함하는 불연속 파동에 관한 리만문제(Riemann problem)는 압축성 오일러 방정식의 자기닮음 파동의 안정성에 관한 문제이다. 구체적으로 리만문제를 기술하자면 다음과 같다.

리만문제: 서로 다른 두 개의 상수상태를 평면 불연속으로 연결하는 초기 상태에서 발현된 자기닮음 파동이 물리적 섭동에 의하여 시간의 흐름에 따라 안정적인가?

이러한 리만문제는 19세기 중반에 유체의 점성 효과를 고려하기 위해 압축성 오일러 방정식에 점성 항(viscous term)을 추가함으로써 유도 된 나비에-스토크스(Navier-Stokes) 방정식의 등장과 20세기의 해석학의 비약적인 발전에 의해 다음과 같은 추측(conjecture)으로 재정립되었다.

추측: 리만문제는 압축성 나비에-스토크스 방정식의 비점성 극한(vanishing viscosity limit)들의 집합 위에서 해결될 수 있다.

위의 추측은 수리유체역학 분야에서 가장 중요하고 오래된 문제로서 단순한 경우조차 미해결인 난제이다.

2. 연구내용

Alexis Vasseur 교수와의 공동 연구에 의해 위의 추측의 중요한 부분이 최초로 해결되었다. 구체적으로 1차원 공간 위에서 정의된 압축성 나비에-스토크스 방정식의 비점성 극한들의 집합 위에서 오일러의 약한 충격파(weak shock)의 안정성을 증명하는데 성공하였다. 약한 충격파의 안정성을 1차원 공간 위에서 해결하기 위하여 다양한 맥락에서 적용 가능한 형태의 혁신적이고 강력한 해석적 방법론을 개발하였다. 개발된 새로운 방법론의 구체적인 아이디어는 다음과 같다.

3. 기대효과

우선 나비에-스토크스 방정식의 비점성 극한들의 존재성을 보장하기 위하여 충격파에 대응하는 나비에-스토크스 방정식의 점성 충격파(viscous shock)를 고려하는데, 점성 충격파는 점성 계수가 0으로 접근함에 따라 충격파로 수렴하는 나비에-스토크스 방정식의 특이한 해이다. 이러한 점성 충격파 주변에서 임의의 크기를 갖는 섭동의 균등적인 안정성(uniform stability)을 증명할 수 있다면 원하는 비점성 극한들의 존재성을 보장받을 수 있게 된다. 리만문제에서 언급한 충격파와 물리적 섭동은 오일러 방정식의 엔트로피 해를 의미하기 때문에 추측을 해결하기 위한 시작점으로써 오일러 방정식의 엔트로피가 갖는 수학적 성질을 잘 이해하고 활용하는 것이다. 엔트로피에 관한 중요한 수학적 성질은 엔트로피가 해에 관하여 strictly convex하다는 것이다. 따라서 이러한 엔트로피에 의해 정의된 상대엔트로피(relative entropy)는 거리 범함수(distance functional)의 역할을 수행할 수 있기 때문에, 나비에-스토크스 방정식의 점성 충격파와 그것의 임의의 섭동과의 거리를 재는데 상대엔트로피를 이용하는 것은 자연스러운 접근 방법이다. 그런데 점성 충격파는 서로 다른 두 개의 상수 상태에 의해 결정된 어떤 상수 속도로 움직이는 반면에 그것의 임의의 섭동(밀도, 운동량, 에너지의 함수들로 구성됨)은 일반적으로 공간의 각 점마다 서로 다른 속도로 공간상에서 퍼져나간다. 따라서 이러한 서로 다른 전파 속도를 제어하기 위하여 임의의 섭동을 공간적으로 평행이동 시키는 함수와 가중치 함수를 적절하게 구축하는 작업이 필요하다. 즉, 적절한 공간적 평행이동과 가중치 하에서 점성 충격파의 임의의 섭동의 궤도 안정성(orbital stability)을 시간과 점성계수에 의존하지 않도록 제어하는 것이 새로운 방법론의 핵심 아이디어이다.

위에서 제시된 연구 성과는 압축성 오일러 및 나비에-스토크스 방정식의 충격파를 포함한 일반적인 엔트로피 해의 존재성, 유일성 및 안정성에 관한 체계적인 연구를 위한 이론적 토대를 제공한다. 또한 연구 결과는 다른 형태의 편미분 방정식의 연구에도 적용될 수 있다. 구체적으로, 압축성 오일러 방정식이 갖는 수학적 구조는 쌍곡형 보존법칙들(hyperbolic conservation laws)이라는 추상적 구조로 설명될 수 있고, 오일러 방정식에서 얻은 결과는 이러한 추상적 구조를 갖는 다양한 형태의 편미분 방정식들의 연구에 적용될 수 있다. 예를 들어, 맥스웰(Maxwell) 방정식, 자기유체역학(magnetohydrodynamics)에 관한 방정식, hyperelastic materials(e.g. strings, membranes)에 관한 방정식뿐만 아니라 최근에 모델링 된 교통량의 흐름, 혈액의 흐름, 에너지 재생에 관한 방정식들은 모두 압축성 오일러 방정식과 동일한 수학적 구조를 갖는다. 따라서 이러한 방정식들에 대해서도 동일하게 리만문제(즉, 위의 모델들의 불연속 파동의 안정성 문제)를 고려할 수 있다. 사실, 위의 몇몇 모델들에 관한 리만문제는 예전부터 중요하게 거론돼 왔고 현재까지 미해결 난제로 남아 있다. 해당 연구 결과는 이러한 다양한 모델들에 대응하는 리만문제를 해결하기 위한 최초의 이론적 토대를 제공한다. 한편 제시된 새로운 방법론은 궁극적으로 리만문제에 관한 추측을 완전히 해결하기 위한 핵심 도구로 사용되어 질 것이다. 구체적으로, 새로운 방법론은 기본적으로 에너지 방법론에 기반을 두고 있어서 충격파를 포함하는 다양한 형태의 자기닮음 파동들(즉, rarefaction wave, contact discontinuity)의 합성파동의 안정성을 증명하는데 활용되어 질 수 있다. 또한 방법론은 점성을 갖는 다양한 맥락의 모델 연구에 활용될 수 있는 강인함(robustness)이 있다. 이는 압축성 나비에-스토크스 방정식에 내포된 보존법칙들의 점성 쌍곡형의 추상적 구조와 엔트로피 구조에 기반을 두고 개발되었기 때문에 일반적인 맥락에서 다양한 모델에 적용 가능하다. 실제로 최근에 이 방법론을 적용하여 종양 혈관 생성(tumour angiogenesis)의 원리를 기술하는 편미분방정식 모델의 진행파 주변에서 임의의 크기로 발생하는 해의 존재성, 유일성, 안정성을 증명하는데 성공하였다.

연구성과

- 논문** Moon-Jin Kang and Alexis Vasseur, Uniqueness and stability of entropy shocks to the isentropic Euler system in a class of inviscid limits from a large family of Navier-Stokes systems, *Inventiones mathematicae*, Vol. 224, pages 55-146, 2021.
- Moon-Jin Kang and Alexis Vasseur, Contraction property for large perturbations of shocks of the barotropic Navier-Stokes system, *Journal of the European Mathematical Society*, Vol.23 pages 585-638, 2021.
- 수상** 2021년 대한수학회 봄 학술대회 논문상 수상 논문

연구비 지원 정부과제(한국연구재단, 블라소브 형태의 방정식의 유체극한과 쌍곡 보존 시스템에 관한 연구)