

컨벡스 최적화를 이용한 공대공 유도탄의 중기 유도 기법 A Midcourse Guidance for Air-to-Air Missiles using Convex Optimization

정철구* · 이창훈* · 탁민제*
Cheol-Goo Jung* · Chang-Hun Lee* · Min-Jea Tahk*

* 한국과학기술원
(lckdgn@kaist.ac.kr)

ABSTRACT

This paper deals with the optimal midcourse guidance maximizing the final velocity for the air-to-air missiles using convex optimization. To this end, a highly nonlinear optimal control problem is first converted into the second-order cone programming (SOCP) using successive linearization and convexification techniques. In the proposed approach, the angle-of-attack rate is chosen as a pseudo control input in order to obtain the control affine system. Additionally, linear regularization terms on the performance index are introduced to relieve the sub-problem infeasibility issue in the successive linearization procedure. Finally, numerical simulations are performed to validate the proposed approach.

Key Words : Midcourse guidance, Convex optimization, Affine transformation, regularization

1. 서론

공대공 유도탄의 중기 유도 문제는 적절한 구속조건 하에서 성능지수를 최대화 혹은 최소화하는 제어입력을 도출하는 최적화 문제로 생각할 수 있다. 이러한 최적화 문제는 비선형 동역학과 복잡한 구속조건으로 인해 전통적인 비선형 계획법(NLP)으로는 짧은 시간 안에 풀기 어렵다.

컨벡스 최적화는 실시간 유도 및 제어에 적용될 수 있는 유용한 기법 중 하나이다. 구속조건을 적절하게 컨벡스화 한다면 컨벡스 최적화는 어떠한 구속조건 제거나 근사화 없이도 최적화 문제를 빠르고 효율적으로 풀 수 있다. 중기 유도 구간에서 공대공 유도탄은 예상요격점을 향해 유도되는데, 목표물의 기동으로 인해 예상요격점이 갱신되면 새로운 초기값과 새로운 종값을 갖는 최적화 문제를 실시간으로 풀어야 한다. 본 논문에서는 공대공 유도탄 중기 유도 문제에 컨벡스 최적화의 적용 가능성을 검증하고자 한다.

2.1 공대공 유도탄의 중기 유도 문제 정의

공대공 유도탄의 중기 유도 문제는 아래와 같다. 질량의 변화는 미리 정해진 값이기 때문에 상태변수로 고려하지 않았다. 밀도는 지수함수로 (8)과 같이 모델링하였다.

$$\min J = -V(t_f) \tag{1}$$

$$\dot{x} = V \cos \gamma \tag{2}$$

$$\dot{h} = V \sin \gamma \tag{3}$$

$$\dot{V} = \frac{-D + T \cos \alpha}{m} - g \sin \gamma \tag{4}$$

$$\dot{\gamma} = \frac{L + T \sin \alpha}{mV} - \frac{g \cos \gamma}{V} \tag{5}$$

$$L = 0.5 \rho V^2 S_{ref} C_L, \quad D = 0.5 \rho V^2 S_{ref} (C_{D_0} + K C_L^2) \tag{6}$$

$$C_L = C_{L_\alpha} \alpha \tag{7}$$

$$\rho = \rho_0 \exp(-h / h_z) \tag{8}$$

$$T = \begin{cases} T_0, & t \leq t_{burn} \\ 0, & t \geq t_{burn} \end{cases} \tag{9}$$

$$m = \begin{cases} m_0 - \dot{m}t, & t \leq t_{burn} \\ m_0 - \dot{m}t_{burn}, & t \geq t_{burn} \end{cases} \tag{10}$$

$$-\alpha_{max} \leq \alpha \leq \alpha_{max} \tag{11}$$

2.2 무차원화 및 아핀(affine)변환

해의 수렴성 향상을 위해 x, h 는 x 의 최종값으로 무차원화하고, V 는 초기속력으로부터 연소시간동안 추력으로 등가속했을 때의 최종속력으로 무차원화 한다. 종말 시점이 고정되지 않은 문제이므로 (12)를 이용해 새로운 독립변수 τ 를 도입한다. $t = t_f$ 와 $\tau = 1$ 이 대응되므로 $\eta = t_f$ 임을 알 수 있다.

또한 유일한 입력 변수인 α 인데, 동역학식을 입력에 대한 아핀 형태로 변형시키기 위해 (13)를 도입한다[1]. 입력 u 를 도입하면 입력에 대한 선형화가 필요하지 않다. 최종적으로 무차원화 된 동역학식은 (14)와 같다. 여기서 $f(z)$ 는 (2)-(5), (13)을 무차원화한 식이다.

$$t = \eta \tau, \quad \tau \in [0, 1] \tag{12}$$

$$\dot{\alpha} = u / \eta \tag{13}$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \eta f(z) + Bu \tag{14}$$

여기서 $z \triangleq [x, h, V, \gamma, \alpha]^T$, $B \triangleq [0, 0, 0, 0, 1]^T$

2.3 선형화

컨벡스 최적화를 이용하기 위해서 비선형 동역학을 선형화 해야 한다. 식(14)를 상태변수 z 와 최종 시간 η 에 대해 선형화 하면 (15)와 같다. (16)의 신뢰구간을 구속조건으로 추가해 최적화과정에서 비선형 동역학으로부터 크게 벗어나지 않도록 한다. 신뢰구간에서 벗어난 곳에서 최적해를 찾으면 실현불가능 문제를 초래할 수 있다. 여기서 윗첨자 i 는 반복(iteration) 횟수를 의미한다.

$$\frac{dz}{d\tau} \approx F_z(z^i, \eta^i)z + F_\eta(z^i)\eta + R(z^i, \eta^i) + Bu \quad (15)$$

$$F_z(z^i, \eta^i) = \eta^i \frac{\partial f(z^i)}{\partial z}, F_\eta(z^i) = f(z^i), R(z^i, \eta^i) = -\eta^i \frac{\partial f(z^i)}{\partial z} z^i$$

$$\|z - z^i\| \leq \delta \quad (16)$$

2.4 이산화 및 컨벡스 최적화

$\tau \in [1, 0]$ 구간을 노드 수에 따라 분할하고 사다리꼴 방법을 이용해 이산화 한다. 한 가지 고려할 점은 연소 시간이 노드와 정확하게 일치하지 않는다는 것이다. 심지어 종말시간이 달라지면 연소시간과 가까운 노드의 위치가 달라진다. 이 문제를 해결하기 위해 최적화가 한번 진행될 때마다 Fig.1과 (17)와 같이 가장 가까운 마디에 연소시간을 위치시키고, 추력의 총역적을 보존하도록 추력을 조정한다. 마디를 많이 사용하면 이와 같은 근사는 합리적일 것이다.

$$T_0 \tau_{burn} = T_d \tau_{k+1} \quad (17)$$

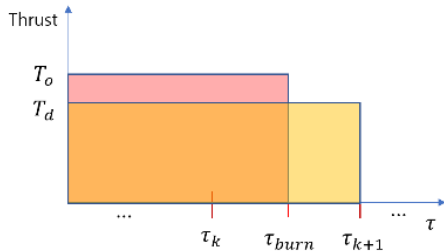


Fig. 1. Burn time and Thrust Modification

이제 동역학식이 선형화 되었고, 구속조건도 컨벡스 형태이기 때문에 컨벡스 최적화가 가능하다. 그러나 수렴성과 실현가능성 문제를 해결하기 위해 (18)와 같이 정규화 항을 추가하는 것이 좋다[2]. 여기서 N 은 노드의 개수이고 v_1, v_2 는 이산화된 동역학식의 실현가능성을 보완해주는 항이고, Δ 는 신뢰구간을 조절해주는 항이다.

$$J = -V_N + w_v \sum_{k=1}^N (v_{1k} + v_{2k}) + w_\delta \sum_{k=1}^N \delta_k \quad (18)$$

$$(Ax + Bu + C\eta + D)|_{k+1} = (Ax + Bu + C\eta + D)|_k + v_{1k} - v_{2k} \quad (19)$$

$$\|z_k^i - z_k\| \leq \delta_k, \quad \forall k \in [0, N-1] \quad (20)$$

$$A_{k+1} \triangleq I - \frac{\Delta\tau}{2} F_{z,k+1}, B_{k+1} \triangleq -\frac{\Delta\tau}{2} B, C_{k+1} \triangleq -\frac{\Delta\tau}{2} F_{\eta,k+1}, D \triangleq -\frac{\Delta\tau}{2} R_{k+1}$$

$$A_k \triangleq I + \frac{\Delta\tau}{2} F_{z,k}, B_k \triangleq \frac{\Delta\tau}{2} B, C_k \triangleq \frac{\Delta\tau}{2} F_{\eta,k}, D \triangleq \frac{\Delta\tau}{2} R_k$$

3. 시뮬레이션 결과

시뮬레이션에서 사용한 초기값과 종말값은 아래와 같다. 초기 추정 궤적은 종말값이 존재하는 경우엔 선형으로 이었고, 종말값이 없는 경우엔 초기값을 적용한다.

$$x_0 = 0km, h_0 = 10km, V_0 = 350m/s, \lambda_0 = 0deg, \alpha_0 = 0deg$$

$$x_f = 20km, h_f = 10km, \lambda_f = 0deg$$

MOSEK을 이용하여 컨벡스 최적화를 수행한다. Fig.2를 통해 교전 궤적이 9번만에 최적해에 잘 수렴함을 확인할 수 있다. 각 최적화마다 0.13~0.16초 정도가 소요되며, 이는 빠르게 최적해를 도출할 수 있음을 의미한다. 이때 최적 종말 속도는 696m/s이다.

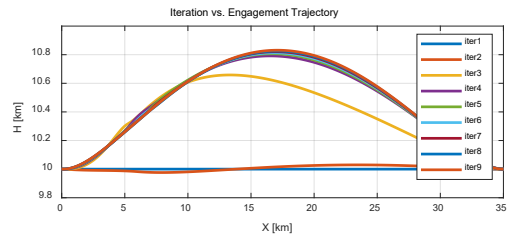


Fig. 2. Engagement Trajectory

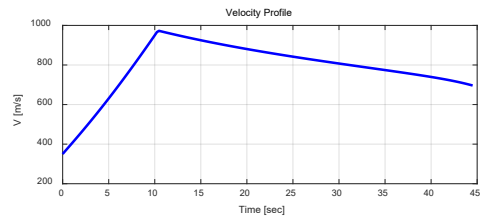


Fig. 3. Velocity Profile

3. 결론

본 논문에서는 컨벡스 최적화를 이용해 공대공 유도탄의 중기 유도 문제의 최적해를 찾는 방법을 다루었다. 제한한 방법은 새로운 입력을 도입하여 동역학식을 입력 아핀 형태로 변환하였다. 이러한 방법으로 복잡한 컨벡스화 과정 없이도 선형화와 정규화만으로 컨벡스 최적화에 적용하는 것이 가능함을 보여주었다. 실시간으로 빠르게 최적해를 찾아야 하는 공대공 유도탄 유도 문제에 컨벡스 최적화를 적용할 수 있음을 검증하였다.

후 기

이 연구는 광역방어 특화연구센터 프로그램의 일환으로 국방과학연구소와 방위사업청의 지원으로 수행되었음(계약번호: UD200043CD).

References

[1] Z. Wang and M. J. Grant, "Constrained trajectory optimization for planetary entry via sequential convex programming," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 40, No. 9, pp. 2603-2615, 2017.

[2] R. Fletcher, *An penalty method for nonlinear constraints*, Numerical Optimization, SIAM Publications, 1985.