

hp 유사스펙트럴 컨벡스 프로그래밍을 이용한 지대공 유도탄 중기 궤적 최적화

정철구^{1*}, 정기욱¹, 이창훈¹
 한국과학기술원¹

hp Pseudo-Spectral Convex Programming for Mid-course Trajectory Optimization for Surface-to-Air Missiles

Cheol-Goo Jung^{1*}, Ki-Wook Jung¹, Chang-Hun Lee¹

Key Words : Convex programming, Exact Convexification, Control Affine, Pseudo-Spectral Method, Successive Linearization, Trajectory Optimization

서론

그동안 항공우주분야에서 궤적 최적화에 대한 다양한 연구들이 수행되었다^[1]. 비선형 동역학과 복잡한 구속조건을 포함하는 최적 제어문제는 수치적으로 해를 구하는 직접(direct)방법으로 풀 수 있다. 전사(transcription)를 통해 최적 제어 문제를 최적화 문제로 변환하여 입력 프로파일을 구하는 방법들이 시도되어왔다. 그중에서도 hp 유사스펙트럴 방법은 독립변수를 몇 개의 단편으로 나누고 각각의 단편 안에서 전역 함수 보간을 사용하기 때문에 다른 전사 방법들에 비해 비교적 빠르고 정확하게 최적해를 구할 수 있다. 또한, 유도탄 궤적 최적화에서 연소 종료 시점을 기준으로 단계를 나누어 최적화할 수 있어 유용하다.

최근에는 실시간으로 최적화가 가능한 컨벡스 프로그래밍이 개발되어 궤적 최적화에 적용되고 있다. 입력 어파인 형태를 동역학을 변형하고, 선형화를 통해 컨벡스 프로그래밍 문제 형태로 변환할 수 있다. 또한, 무손실 컨벡스 완화를 사용하면 선형화 과정 없이도 입력에 대한 등호 조건을 2차 부등호 조건으로 바꾸어 컨벡스 프로그래밍에 적용할 수 있다.

본 논문에서는 hp 유사스펙트럴 컨벡스 프로그래밍 방법을 이용해 지대공 유도탄의 궤적최적화를 수행하고 해의 타당성을 검증하였다.

지대공 유도탄의 중기 유도 문제 정의

지대공 유도탄의 성능지수 및 동역학은 아래와 같이 정의되었다.

$$\min J = -V(t_f) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V \cos \gamma \\ \dot{h} &= V \sin \gamma \\ \dot{V} &= \frac{T \cos \alpha - D}{m} - g \sin \gamma \\ \dot{\gamma} &= \frac{T \sin \alpha + L}{mV} - \frac{g \cos \gamma}{V} \end{aligned} \tag{2}$$

여기서, 상태변수 x, h, V, γ 는 각각 거리, 고도, 속력 및 경로각이고 반응각 α 는 입력이다. 밀도, 양력 및 저항은 (3,4)와 같이 모델링되었다. 고체 추진체의 추력과 질량 프로파일은 (5,6)에 나타내었다. 실속과 과도

한 기동가속도를 방지하기 위한 반응각의 구속조건은 (7)과 같다.

$$L = 0.5 \rho V^2 S_r (C_{L\alpha}), D = 0.5 \rho V^2 S_r (C_{D0} + KC_L^2) \tag{3}$$

$$\rho = \rho_0 \exp(-h/h_s) \tag{4}$$

$$T = \begin{cases} T_0, & t \leq t_{burn} \\ 0, & t > t_{burn} \end{cases} \tag{5}$$

$$m = \begin{cases} m_0 - t \dot{m}, & t \leq t_{burn} \\ m_{burn}, & t > t_{burn} \end{cases} \tag{6}$$

$$-a_{max} \leq \alpha \leq a_{max} \tag{7}$$

컨벡스 프로그래밍

컨벡스 프로그래밍을 궤적 최적화에 적용하기 위해서는 비선형 동역학을 선형화해야 한다. 연소 종료 전/후의 두 단계로 나누어 입력 어파인 형태로 동역학을 변환하면 (8)과 같다. 이 과정에서 2차 테일러 근사를 이용해 $\sin \alpha \approx \alpha, \cos \alpha \approx 1 - 0.5\alpha^2$ 로 근사하였다. 또한, 연소 종료 후 단계에서는 종말 시간이 고정되지 않았기 때문에 독립변수 $\tau \in [0, 1]$ 를 도입하여 종말 시간 고정 문제로 변환하였다.

$$\begin{aligned} \text{phase1} & \{ dz/dt = F(z) + B(z)u \quad (t \in [0, t_{burn}]) \\ \text{phase2} & \{ dz/d\tau = \eta(F(z) + B(z)u) \quad (\tau \in [0, 1], \eta = t_f - t_{burn}) \end{aligned} \tag{8}$$

where $z \triangleq [x, h, V, \gamma], u \triangleq [\alpha, \alpha']$

$$F(z) = \begin{bmatrix} V \cos \gamma \\ V \sin \gamma \\ (T - qS_r C_{D0})/m - g \sin \gamma \\ -g \cos \gamma / V \end{bmatrix}$$

$$B(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & (-0.5T - qS_r KC_{L\alpha}^2)/m \\ (T + qS_r C_{L\alpha})/(mV) & 0 \end{bmatrix}, q = \frac{1}{2} \rho V^2$$

다음으로 이전 최적화 값을 기준으로 선형화를 진행하였다. 여기서 윗첨자 k 는 최적화 반복횟수를 의미한다.

$$\begin{aligned} dz/dt &= A(z^k)z + B(z^k)u + C(z) \\ dz/d\tau &= \eta^k A(z^k)z + \eta^k B(z^k)u + F(z^k)\eta + G(z^k) \end{aligned} \tag{9}$$

where $A(z^k) = \frac{\partial F(z^k)}{\partial z}$, $C(z^k) = F(z^k) - \frac{\partial F(z^k)}{\partial z} z^k$, $G(z^k) = -\eta^k \frac{\partial F(z^k)}{\partial z} z^k$

마지막으로 $u_1 = \alpha$, $u_2 = \alpha^2$ 으로 입력을 치환하고 컨벡스 완화를 수행하면 다음과 같다.

$$u_1^2 \leq u_2 \tag{10}$$

위와 같은 컨벡스 완화조건이 최적화 과정에서 항상 등호를 만족함은 최적 제어 이론을 이용하여 증명할 수 있다^[2].

hp 유사스펙트럴 방법

hp 유사스펙트럴 방법은 독립변수를 h개의 단편으로 나누고, 각각의 단편에서 p개의 노드를 갖는 전역 보간 함수를 통해 이산화하는 방법이다^[3]. (11)과 같이 라그랑지 다항함수를 이용하여 유도된 미분 행렬 D를 이용해 미분방정식을 이산화된 대수방정식으로 전사할 수 있다^[3]. 여기서 오른쪽 항 앞에 곱해지는 값은 유사스펙트럴에서의 독립변수 $\zeta \in [-1, 1]$ 와 원래의 독립변수들 $t \in [0, t_{burn}]$, $\tau \in [0, 1]$ 사이의 스케일 파라미터이다.

$$\begin{cases} D_1[z_{i,0}^k, z_{i,1}^k, \dots, z_{i,p_1}^k] = \frac{t_{burn}}{2} [A(z_{i,i}^k)z_{1,i} + B(z_{i,i}^k)u_{1,i} + C(z_{i,i}^k)] \\ D_2[z_{2,0}^k, z_{2,1}^k, \dots, z_{2,p_2}^k] = \frac{1}{2} [\eta^k A(z_{2,j}^k)z_{2,j} + \eta^k B(z_{2,j}^k)u_{2,j} + F(z_{2,j}^k)\eta + G(z_{2,j}^k)] \end{cases} \tag{11}$$

여기서 $i = 1, \dots, p_1$, $j = 1, \dots, p_2$

상태변수들은 연속이어야 하기 때문에 연소 종료 전의 마지막 값과 연소 종료 후의 처음 값들은 (12)처럼 연결되어야 한다. 부등호 구속조건 (7)은 각 노드에서 쉽게 이산화될 수 있다.

$$z_{1,p_1} = z_{2,0} \tag{12}$$

위와 같이 유사스펙트럴 방법으로 전역 보간을 하면 해의 정확도를 높일 수 있다.

시뮬레이션 결과

시뮬레이션에서 사용한 초기값과 종말값, 최대 받음각을 Table.1에 나타내었다. 해당 시뮬레이션에서는 단계별로 각각 30개, 20개의 노드를 사용하였다. x, h, γ 는 초기값과 종말값을 직선으로 연결해 초기화를 진행하였다. v 는 연소 종료 전에 증가하고 연소 종료 후에는 감소하도록 선형으로 초기화하였고, α 는 모두 0으로 초기화하였다.

Table 1. 초기/종말값 및 최대 받음각

파라미터	값	파라미터	값
x_0	0 km	x_f	15 km
y_0	0 km	y_f	60 km
V_0	10 m/s	γ_f	40 °
γ_0	90 °	α_{max}	20 °

Fig. 1.~2.은 동역학을 근사화하지 않고 최적화를 수행한 GPOPS-II의 결과와 비교한 것이다. 입력은 상태변수와 달리 연속일 필요가 없고 자유로운 값을 취할 수 있기 때문에 연소 종료 직후 불연속적인 값을 갖는 것을 확인할 수 있다. Fig. 3.는 궤적이 수렴하는 과정을 나타낸 것이고 3번 만에 매우 빠르게 최적해로 수렴하였다. Fig. 4.을 통해 무손실 컨벡스 완화가 되

었음을 확인할 수 있다.

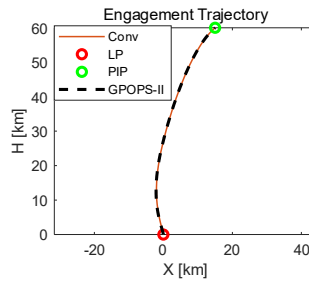


Fig. 1. 최적화된 궤적 비교

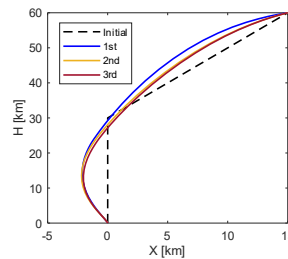


Fig. 3. 연속 컨벡스 최적화 결과

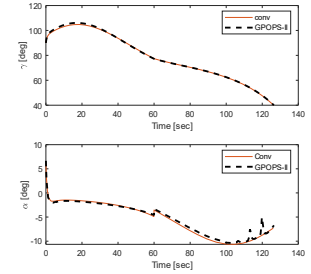


Fig. 2. 경로각과 받음각

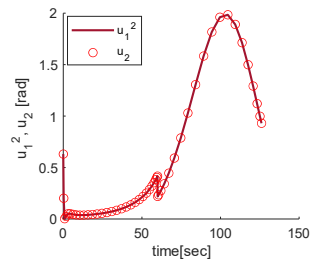


Fig. 4. 무손실 컨벡스 완화 결과

결론

본 논문에서는 hp 유사스펙트럴 컨벡스 최적화 방법을 통해 지대공 유도탄의 중기 궤적 최적화 연구를 수행하였다. 연소 종료 전/후로 단계를 나누고, 입력어파인 형태로 동역학식을 변환하였다. 이 과정에서 입력값에 대해 무손실 컨벡스 완화를 수행하였다. 동역학 식은 hp 유사스펙트럴 방법을 이용해 대수방정식 형태로 변환되었다. 상태변수를 부정확하게 초기화했음에도 불구하고 컨벡스 프로그래밍을 통해 최적 해로 빠르게 수렴하는 것을 확인하고 실시간 지대공 유도탄 궤적 최적화에 적용 가능함을 검증하였다.

후기

이 연구는 광역방어 특화연구센터 프로그램의 일환으로 국방과학연구소와 방위사업청의 지원으로 수행되었음(계약번호: UD200043CD).

참고문헌

- 1) Liu, Xinfu, Zuojun Shen, and Ping Lu. "Exact convex relaxation for optimal flight of aerodynamically controlled missiles." IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems 52.4 (2016): 1881-1892.
- 2) 권혁훈, et al. "컨벡스 프로그래밍을 이용한 추진-활공 유도탄의 중기궤적 최적화." 한국항공우주학회지 49.1 (2021): 21-30.
- 3) Sagliano, Marco. "Generalized hp pseudospectral-convex programming for powered descent and landing." Journal of Guidance, Control, and Dynamics 42.7 (2019): 1562-1570.