

# 회전하는 탄성막대 문제의 시간적분 해석

## Time Integration Analysis of Rotating Elastic Bar Problem

고 영 빈\* · 이 필 승\*\*

Ko, Yeong-Bin · Lee, Phill-Seung

---

### 요 약

본 논문에서는 다양한 시간적분 방법을 이용하여 큰 회전변위를 갖는 단진자 문제를 해석했다. 탄성 막대 유한요소로 모델링된 이 문제는 trapezoidal rule로 해석할 경우 작은 시간 스텝 크기에서도 해석이 어렵다. 최근 Bathe(2002)가 제안한 composite 시간적분법은 이러한 문제에 있어서 해석의 안정성을 개선하였다. 본 논문에서는 세가지 시간적분법(single-step Houbolt, SS32, general 9-parameter)을 통해 이 예제를 풀어봄으로써 각 시간적분법의 안정성과 정확성을 비교한다.

**keywords** : *dynamic analysis, large displacement, elastic pendulum*

---

## 1. 서 론

큰 변위로 회전하는 simple pendulum 문제는 Tarnow(1993)와 Crisfield(1997)에 의해 90년대에 해석되었고 trapezoidal rule방식의 시간적분이 발산함이 보여졌다. Kuhl(1999)은 이 문제가 Generalized-alpha방법에 의해 해석이 가능함을 보였고 또한 최근에는 Bathe(2002)가 composite방법으로 이 문제를 안정하게 해석하였다. 특히 composite방법은 single-step의 trapezoidal rule을 two-step으로 변환시킨 뒤 시간 스텝의 마지막에 backward difference formula를 이용한다. 반면 trapezoidal rule은 시간적분 방식 중 Newmark의 일종이고, Newmark방법의 파라미터를 변화시켜 가면서 이 문제를 해석해 볼 필요가 있다. 만약 Newmark방법이 파라미터 변화에 따라 전체적으로 불안정하다면 이와 다른 파라미터를 갖는 시간적분 방법으로 시도가 가능하다.

Modak와 Sotelino(2001)은 최근에 single-step의 시간적분 방법을 총 9개 parameter를 갖도록 분류해 놓은 바 있다. 이 9개의 파라미터 중 Newmark와 동일한 파라미터를 제외한 방법으로 시도해볼 수 있으며 만약 잘 해석될 경우 원래의 trapezoidal rule을 포함해서도 안정적인 해석이 가능한지 시도가 가능하다.

## 2. 해석 예제와 시간적분 방식

본 연구에서 사용한 예제는 다른 문헌들을 참고하여 그림 1에 표시된 것과 같다. 시간적분 방식은 우선 전통적인 trapezoidal rule방식을 이용하였고 다른 방식으로는 Chung 와 Hulbert(1992)의 single-step Houbolt(SSH), 그리고 Modak와 Sotelino(2001)가 분류한 대로 SS32 및 general 9-parameter방식을 적용했다. SS32의 파라미터는 실험적으로 결정되었고 가능한 시간 스텝이 클 때 안정적인 해석이 가능하도록 하였

---

\* 학생회원 · 한국과학기술원 해양시스템공학과 석사과정 kyb404@kaist.ac.kr

\*\* 한국과학기술원 해양시스템공학과 부교수 phillseung@kaist.edu

다. general 9-parameter에서 사용된  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$  이 1.5, 1.0, 1.0, 1.5, 1.0, 1.0일 때 trapezoidal rule과 동일하게 되는데 general 9-parameter에서는 SS32에 사용된 파라미터를 이러한 trapezoidal rule에 적용하였다. 본 논문에서는 Bathe의 composite방법과 이런 다양한 방법들을 비교하기 위해 asymptotic computational cost를 Bathe의 composite방법에 맞추고자 composite 방법 이외의 방법들을 두 개의 substep을 사용해서 해석하였다.

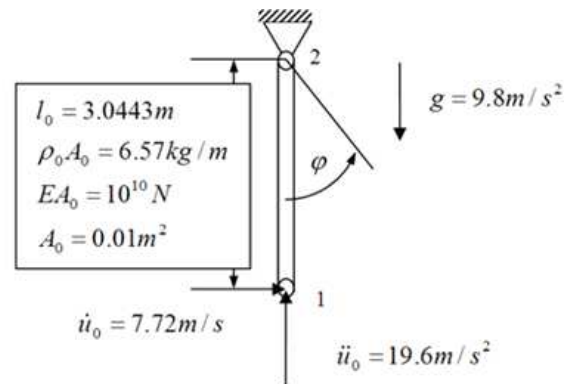


그림 1 truss element를 이용한 simple pendulum의 모델과 초기조건

시간적분법	파라미터	사용된 값
composite	$\gamma$	0.5
single-step Houbolt	$\gamma_1$	0.5
SS32	$\theta_1, \theta_2, \theta_3$	1.37, 2.0, 3.0
general 9-parameter	$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$	1.37, 2.0, 3.0, 1.5, 1.0, 1.0, 1.5, 1.0, 1.0

표 1 각 시간적분 방법에 사용된 파라미터

### 3. 해석결과

#### 3.1. Newmark(Trapezoidal) 방법

전통적인 trapezoidal rule로 진자 문제를 해석한 결과를 그림 2에 나타내었다. 사용한 시간 스텝은 0.01이며, 작은 시간 스텝에서도 반응이 불안정함을 보여준다.

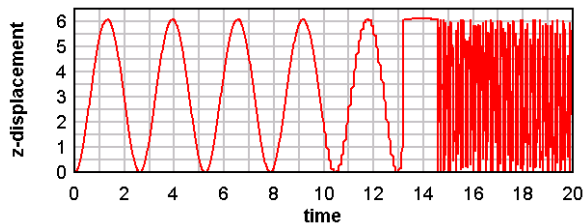


그림 2 Response calculated using Trapezoidal rule ( $\Delta t = 0.01$ )

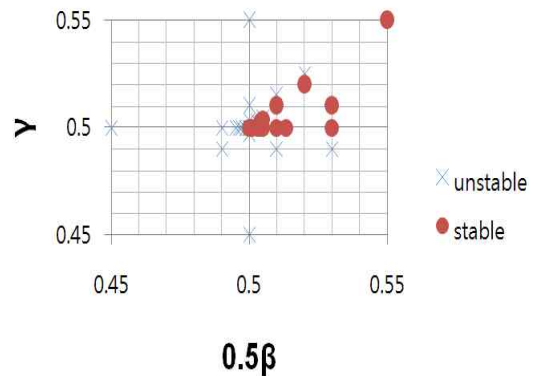


그림 3 Newmark parameter의 stability region

한편 Newmark시간적분에서 trapezoidal rule이 아닌 다른 파라미터 값에 대해서도 해석 결과 불안정한 범위가 넓게 존재하였다. 그림 3는 시간 스텝 0.01에 대해 이 예제의 안정한 범위를 나타낸다.

#### 3.2. composite, 2-substep SSH, 2-substep SS32, 2-substep general 9parameter 방법

각 시간적분 방법을 적용한 해석결과의 전체적인 형상은 그림 4와 같다. 특정 시간 이후에는 해석결과의 진폭이 급격히 감소하는데 이를 특이 시간으로 둘 수 있으며 이 시간을 이용해서 여러 시간적분 방법 간의 비교가 이루어졌다. 시간 스텝을 달리 해서 해석을 할 때마다 특이 시간의 값은 달라진다. 이는 그림 5를 통

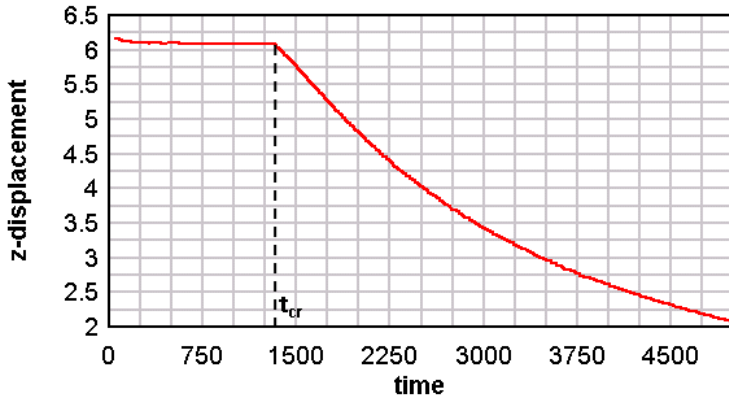


그림 4 국소 최대 변위의 변화를 이용한 특이 시간 ( $t_{cr}$ )의 정의

해 비교하였고, 시간 스텝의 크기가 큰 경우에도 특이 시간의 값이 클수록 안정적인 알고리즘임을 나타낸다. 때문에 SS32방식이 composite방법과 비교해서도 안정성 면에서 뒤지지 않았고 general 9-parameter방식은 더 안정하였다. 또한 특이 시간 이전까지 진폭의 변위 감소는 거의 일어나지 않지만 주기 증가는 계속된다. 특이 시간까지의 주기를 비교할 그림 6에 비교했다. SSH가 다른 알고리즘보다 큰 주기 증가를 보인 것 외엔 주기 증가 추세가 비슷했다.

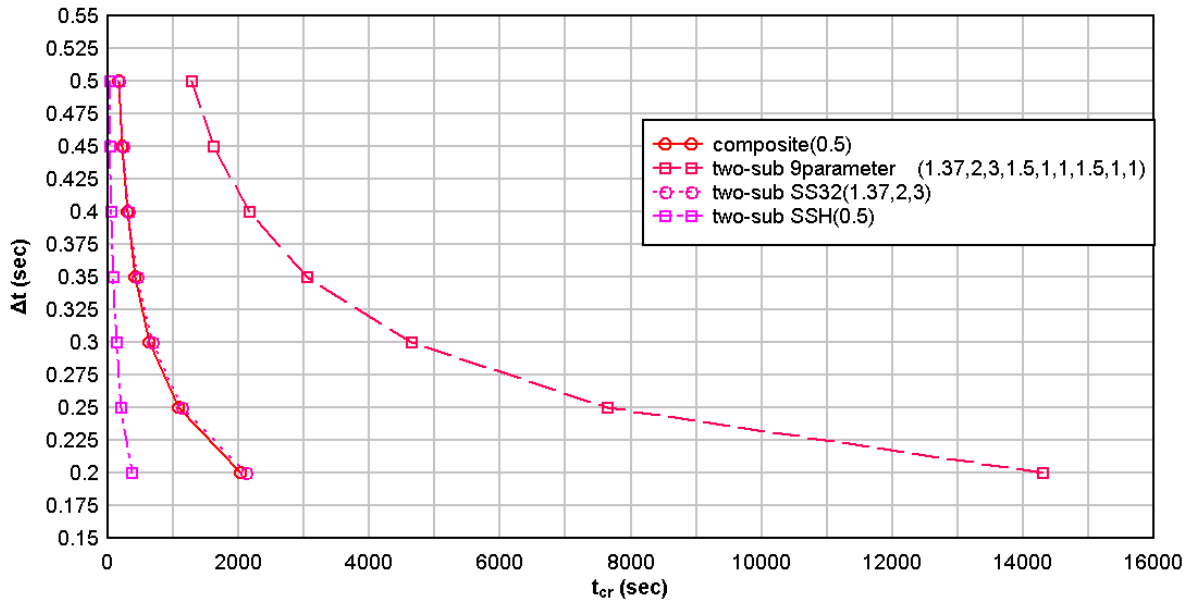


그림 5 사용된 시간 스텝과 특이 시간 ( $t_{cr}$ )과의 관계

#### 4. 결론

본 예제를 다양한 시간적분에 대해 해석한 결과, Newmark 방법을 제외한 방법들은 작은 시간 스텝 크기에 대해 안정적이지만, 큰 시간 스텝 크기를 사용하면 주기 증가 및 특이 시간에서의 급격한 변위 감소가 일어난다. 큰 시간 스텝 크기에 대해 composite와 다른 방법을 비교한 결과 SS32라는, Newmark와 다른 파라미터를 사용하는 경우 비슷한 안정성을 얻었으며 9parameter방법을 통해 SS32의 방법을 trapezoidal rule에 다시 적용시킨 결과 안정성이 오히려 증가되었다.

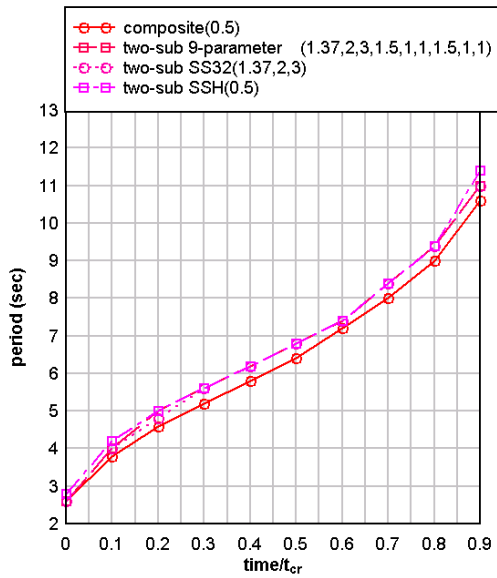


그림 6 특이 시간에 대한 시간의 비(0~1)에 따른 진자의 증가된 주기 ( $\Delta t = 0.2$ )

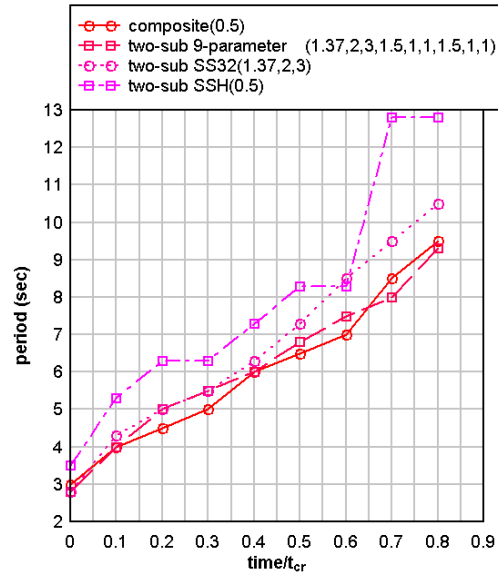


그림 7 특이 시간에 대한 시간의 비(0~1)에 따른 진자의 증가된 주기 ( $\Delta t = 0.5$ )

### 감사의 글

본 연구는 2012년도 지식경제부의 재원으로 한국에너지 기술평가원(KETEP)의 지원을 받아 수행한 연구 과제입니다. (No. 20114030200040)

### 참고문헌

- Crisfield, MA.** (1997) Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol2 Advanced Topics, *Wiley*, Chichester
- Bathe, K.J..** (2002) On a composite time integration procedure for nonlinear dynamics, *Computers & Structures*, 83, pp.2513~2524.
- Chung, J, Hulbert GM..** (1992) A family of single-step Houbolt time integration algorithms for structural dynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 118, pp.1~11.
- Kuhl, D, Crisfield MA..** (1999) Energy-conserving and decaying algorithms in non-linear structural dynamics, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 45, pp.569~599.
- Modak, S, Sotelino, ED..** (2001) The generalized method for structural dynamics applications, *Advances in Engineering Software*, 33, pp.565~575
- Tarnow, N.** (1993) Energy and momentum conserving algorithm for Hamiltonian System in nonlinear dynamics of solids, Stanford University, Mechanical Engineering, Sudam report N. 93-4,