

Euler 방정식에 대한 LU implicit scheme의 수렴성 해석

김 주 성^{*1}, 권 오 준^{*2}

Convergence Analysis of LU scheme for the Euler equations

J. S. Kim and O. J. Kwon

A comprehensive study has been made for the investigation of the convergence characteristics of the LU scheme for the Euler equations using von Neumann stability analysis. The stability results indicate that the convergence rate is governed by a specific parameter combination. Based on this insight, it is shown that the LU scheme will not suffer convergence deterioration at any grid aspect ratios if the local time step is defined using appropriate parameter combination. The numerical results demonstrate that this time step definition gives uniform convergence for grid aspect ratios from one to 1×10^4 .

Key Words: LU 기법, von Neumann stability analysis, Euler 방정식, 비정렬 격자

1. 서 론

Euler 방정식에 대해서 upwind 기법을 사용하여 공간 차분화를 수행하고 lower-upper(LU) factorization 기법을 적용하면, 결과적인 차분 방정식의 특성은 5개의 독립변수로 표현된다. 5개의 독립 변수는 마하수(Ma), 격자 종횡비(grid AR), 유동각(flow angle), CFL number, subiteration 개수 이다. 지금 까지 LU 기법의 특성을 파악하기 위한 여러 가지 연구가 수행되어 왔으며, 이러한 연구들은 위에서 언급한 독립 변수에 대한 내용으로 정리할 수 있다. Jespersen[1]은 multigrid 기법의 하나의 부분으로서 LU 기법의 특성을 파악하였다. 이 연구에서는 위에서 언급된 5

개의 독립 변수 중에서 격자 종횡비에 대해서 논의되었으며, 격자 종횡비가 증가함에 따라 고주파수 damping 특성이 나빠지는 것을 보였다. 또한 Buelow 등[2]은 alternating direction implicit(ADI), line Gauss-Seidel(LGS), LU 기법의 격자 종횡비에 따른 특성을 파악하는 연구를 수행하였다. 이 연구에서 ADI와 LGS 기법은 적절한 CFL number의 사용을 통해서 격자 종횡비에 따른 수렴성 저하 현상을 완전히 제거할 수 있음을 보였다. 하지만 LU 기법에 대해서는 axial-mode stiffness에 의해서 격자 종횡비가 증가함에 따라 수렴성이 감소함을 보였다. 이러한 연구들과는 달리, Wright 등[3]은 잔류항의 직접 미분을 통해서 얻을 수 있는 full implicit operator와 Jameson과 Yoon[4]이 제안한 diagonal implicit operator의 격자 종횡비에 따른 특성을 파악하는 연구를 수행하였다. 이 연구에서 diagonal implicit operator는 격자 종횡비가 증가함에 따라 급격히 수렴성이 저하되며, full implicit operator의 사용을 통해서 이러한 수렴성 저하가 어느 정도 완화될 수 있

*1 학생회원, KAIST 항공우주공학과 대학원,
E-mail : soo@kaist.ac.kr

*2 종신회원, KAIST 항공우주공학과,
E-mail : ojkwon@kaist.ac.kr

음을 보였다.

위에서 볼 수 있듯이, LU 기법의 특성을 파악하기 위한 여러 가지 연구가 수행되어 왔지만 이러한 연구들은 대부분 특정한 독립 변수나 특정한 상황에 대해서 수행되었다. 특히 최근 들어 대부분의 LU 기법에 대해서는 subiteration이 사용되고 있지만, 이러한 subiteration에 대한 특성은 거의 논의되고 있지 않다. 본 연구에서는 마하수를 제외한 4개의 독립변수에 대해서 LU 기법의 특성을 파악하고자 한다. 마하수는 low Mach number preconditioning 기법과 관련되어 있으며, 본 논문의 관심 영역의 밖에 있다.

LU 기법의 특성을 파악하기 위해 von Neumann stability analysis 방법을 사용하였다. 상대적으로 간단한 scalar 방정식에 대한 해석을 수행하여 LU 기법의 특성을 파악한 후, 벡터 형태의 Euler 방정식에 대한 해석을 수행하였다. 또한 LU 기법의 특성을 체계적으로 파악하기 위해, 전체 LU 기법은 direct inverison part와 AF error part 나뉘어 지며, 각각의 부분은 따로 논의된다.

2. LU 기법

Euler 방정식에 대해, 유한 체적법과 시간에 대한 backward Euler implicit 기법을 적용하고, 선형화를 하면 다음과 같이 표현된다.

$$\left[\frac{A_i}{\Delta t_i} I + \sum_{j \in M(i)} A^+ + \sum_{j \in N(i)} A^- \right] \Delta Q = -R_i^n \quad (1)$$

여기서 $\Delta Q = Q^{n+1} - Q^n$ 이며, A^+ 와 A^- 는 flux Jacobian을 나타낸다. R_i^n 는 residual을 나타내며, Roe's FDS 기법을 사용하여 계산하였다. Unweighted least-square[5] 방법을 사용하여 고차 정확도를 구현하였으며, 이 방법은 직각을 이루는 사각형 격자에 대해서는 2nd order upwind biased MUSCL 기법과 동일하다. 위 식에서 좌변항에 대해서는 1차 공간 정확도가 사용되었으며, 우변항은 고차 정확도가 사용되었다. 이러한 방법은 좌변항에 고차 정확도를 사용할 경우 band-width가 증가하고 대각우세 성질이 저하되기 때문에 대부분의 CFD 프로그램에서 채택하는 방법이다. 특히 비정렬 격자계에서는 고차 정확도의 좌변항을 사용하면 data

structure가 매우 복잡해진다.

식 (1)을 forward와 backward sweep을 번갈아 하는 subiteration을 수행하는 multi-sweep LU 기법의 형태로 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (D + T_1)D^{-1}(D + T_2)(Q^{k+1} - Q^k) \\ = -R_i^n - (D + T_1 + T_2)(Q^k - Q^n) \end{aligned} \quad (2)$$

위 식에서 D 는 diagonal part를 나타내고, T_1 과 T_2 는 각각 lower part와 upper part를 나타낸다. 또한 위첨자 k 와 n 은 각각 subiteration 과 시간 단계를 나타낸다.

LU 기법에 대한 차별화된 지배방정식인 식 (2)의 특성은 5개의 독립 변수에 의해 지배되며, 5개의 독립변수는 마하수(Ma), 격자 종횡비(grid AR), 유동각(flow angle), CFL number,

subiteration 개수 이다. 본 연구에서는 마하수에 대한 LU 기법의 특성은 논의하지 않는다. 논하고자 하는 4개의 변수는 특성상 프로그램 사용자가 기법의 특성을 고려하여 임의로 조절할 수 있는 user-control parameter와 유동 조건이 정해지면 고정되는 flow-condition parameter로 구분할 수 있다. User-control parameter는 CFL 수와 subiteration 수를 포함하며, flow-condition parameter는 유동각과 격자 종횡비를 포함한다. 본 연구에서 LU 기법의 특성은 고정된 flow condition parameter에 대해서 user-control parameter를 변화시키면서 고찰된다. 이러한 접근을 통해서, LU 기법의 수렴성을 저하시키는 유동 조건을 파악할 수 있으며, user-control parameter를 변화시키면서 이러한 수렴성 저하를 완화시킬 수 있는 방법을 모색할 수 있다.

3. Stability analysis

LU 기법의 수렴성 및 안정성을 고찰하기 위해 von Neumann stability analysis 방법이 사용되었다. Euler 방정식에 대한 해석을 수행하기 전에, 상대적으로 간단한 scalar 방정식에 대한 해석을 먼저 수행한다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

위 식에서 a 와 b 는 각각 x 와 y 방향으로의 wave speed를 나타낸다. 또한 위 식에서 a 와 b 는 서로 다른 부호를 갖으며($a > 0$ and $b < 0$), 이러한 접근을 통해서 Euler 방정식에 존재하는 mixed wave speed를 근사적으로 고려할 수 있다. 같은 부호의 wave speed를 사용하면 LU 기법에 대한 scalar 방정식의 해석을 통해서 Euler 방정식의 특성을 파악할 수 없다.

Multi-sweep LU 기법에 대한 식 (2)는 다음과 같이 다시 쓰여 질 수 있다.

$$(D + T_1 + T_2)(Q^{k+1} - Q^n) + R_i^* = T_1 D^{-1} T_2 (Q^{k+1} - Q^k) \quad (4)$$

위 식에서 좌변은 direct inversion 기법에 해당하는 차분화된 지배방정식과 같다. 또한 우변은 approximate factorization(AF) error로 정의된다. 따라서 LU 기법은 direct inversion 기법과 AF error의 조합으로 구성된다고 볼 수 있다. 본 연구에서는 LU 기법의 체계적인 연구를 위해 direct inversion 기법과 AF error의 거동을 따로 고찰하며, 이러한 고찰을 통해서 두 부분의 조합으로 표현되는 LU 기법의 특성을 파악하는 방법을 사용한다.

4. Direct inversion 기법

Direct inversion 기법이 적용되어 차분화된 Euler 방정식의 특성은 LU 기법이 적용되어 차분화된 식을 지배하는 5개의 독립 변수 중에서 subiteration을 제외한 4개의 독립 변수에 의해 지배된다.

4.1 Scalar 방정식

Euler 방정식과 같은 방법으로 차분화된 scalar 방정식에 대한 amplification factor는 쉽게 구해질 수 있다. 이러한 식에 대한 거동을 좀 더 쉽게 알아보기 위해서 purely x-directional wave에 대한 amplification factor와 purely y-directional wave에 대한 amplification factor를 구분하여 보는 방법을 사용한다. 그러면 flow angle의 크기에 따라 전혀 다르게 거동하는 것을 알 수 있다. 만약에 θAR 가 매우 큰 값을 갖는다면($\theta AR \gg 1$), amplification factor는 purely x와 y directional wave에 대해서 다

음과 같이 쓸 수 있다.

purely x directional wave:

$$G_{direct,x} = f\left(\frac{1}{\theta} \times \frac{CFL}{AR}; \phi_x\right) \quad (5)$$

purely y directional wave:

$$G_{direct,y} = f(CFL; \phi_y) \quad (6)$$

만약에 θAR 가 매우 작은 값을 갖는다면($\theta AR \ll 1$), 다음과 같이 표현될 수 있다.

purely x directional wave:

$$G_{direct,x} = f(CFL; \phi_x) \quad (7)$$

purely y directional wave:

$$G_{direct,y} = f(\theta \times (CFLAR); \phi_y) \quad (8)$$

여기서 Scalar 방정식에 대한 amplification factor의 거동을 완전히 다르게 하는 θAR 의 의미에 대해서 알아볼 필요가 있다. θAR 의 크기는 정의상 다음과 같이 시간 간격으로 표현될 수 있다.

$$\theta AR = \frac{b/\Delta y}{a/\Delta x} = \frac{1/\Delta t_y}{1/\Delta t_x} = \frac{\Delta t_x}{\Delta t_y} \quad (9)$$

위 식에서 Δt_x 는 어떤 error wave가 x 방향 wave speed, a , 로 x 방향 격자 길이, Δx , 를 이동하는데 필요한 시간으로 생각할 수 있으며, Δt_y 도 y 방향 변수를 사용하여 비슷하게 표현할 수 있다. 따라서 $\theta AR \gg 1$ 일 때는, 어떠한 error wave가 x 방향으로 전파되는데 걸리는 시간간격이 y 방향으로 전파되는 시간간격보다 매우 크다는 것을 뜻한다. 결국 x 방향으로의 error damping이 y 방향보다 훨씬 안 좋아진다. $\theta AR \ll 1$ 일 때는 반대로 y 방향으로의 error damping이 x 방향보다 훨씬 안 좋다고 말할 수 있다. 전체적인 damping rate는 항상 가장 안 좋은 것으로 접근하는 경향이 있다. 따라서 $\theta AR \gg 1$ 인 경우의 전체적인 amplification factor는 x 방향의 amplification factor로 접근하며, $\theta AR \ll 1$ 인 경우에

대해서는 y 방향 amplification factor로 접근한다.

Amplification factor에 관한 또 다른 중요한 고찰은 CFL 수가 무한대로 증가함에 따른 점근 거동 (asymptotic behavior)이다. Direct inversion 기법에 대한 amplification factor의 수식을 통해서, θAR 가 매우 클 때나 작을 때 모두에 대해서, $CFL \rightarrow \infty$ 에 따라 독립 변수에 무관하게 spatial frequency만의 함수로 표현되는 것을 쉽게 볼 수 있다.

지금까지의 amplification factor의 고찰을 바탕으로 하여, direct inversion 기법이 적용된 scalar 방정식에 대한 amplification factor는 유동각의 크기에 따라 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\text{for } \theta AR \gg 1: \quad (10)$$

$$G_{direct} = \begin{cases} f\left(\frac{CFL}{AR}; \phi_x, \phi_y\right) \\ f(\phi_x, \phi_y): \text{ as } CFL \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\text{for } \theta AR \ll 1: \quad (11)$$

$$G_{direct} = \begin{cases} f(CFL \times AR; \phi_x, \phi_y) \\ f(\phi_x, \phi_y): \text{ as } CFL \rightarrow \infty \end{cases}$$

위 식은 amplification factor의 수치적인 계산을 통해서 검증될 수 있으며, 간단한 표현을 위해 norm을 사용하였다. Fig. 1은 유동각이 큰 경우 ($\theta = 10^2$)에 대한 대표적인 그림이다. 일정한 CFL/AR에 대해서 격자 중횡비가 변화하더라도 norm이 일정한 것을 볼 수 있으며, 따라서 식 (10)과 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 유동각이 작은 경우에 대해서도 잘 일치하는 결과를 얻을 수 있다.

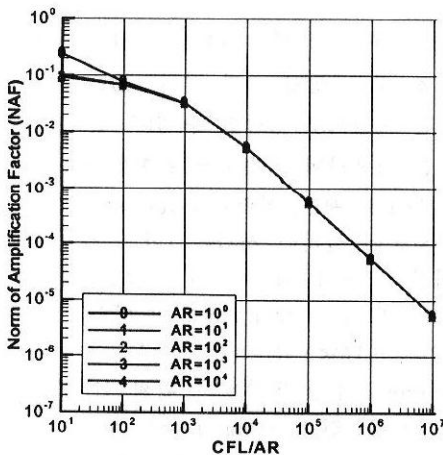


Fig. 1 Norms of amplification factor for direct inversion scheme of the scalar equation (in terms of CFL/AR , $\theta = 10^2$)

4.2 Euler 방정식

Euler 방정식에 대해서는 scalar 방정식과 달리 여러 가지 wave speed가 존재한다. 실제로 어떠한 wave에 대해서 $\theta AR \gg 1$ 이더라도 다른 wave에 대해서는 $\theta AR \ll 1$ 인 경우가 존재할 수 있다. Fig. 2는 Euler 방정식에 대한 결과를 보여주고 있다. 유동각은 $\theta AR = 10^0$ 이 일정하도록 격자 중횡비가 변화함에 따라 바꾸어 주었다. 그림에서 CFL/AR가 일정하면 amplification factor의 norm이 일정한 것을 볼 수 있다.

Euler 방정식에 대해서는 flow angle이 바뀌어도 항상 같은 경향성을 보인다. 따라서 Euler 방정식에 대한 거동은 유동각이 큰 scalar 방정식의 거동과 같음을 알 수 있다. 결과적으로 direct inversion 기법이 적용된 차별화된 Euler 방정식에 대한 거동은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$G_{direct} = \begin{cases} f\left(\frac{CFL}{AR}; \phi_x, \phi_y\right) \\ f(\phi_x, \phi_y): \text{ as } CFL \rightarrow \infty \end{cases} \quad (12)$$

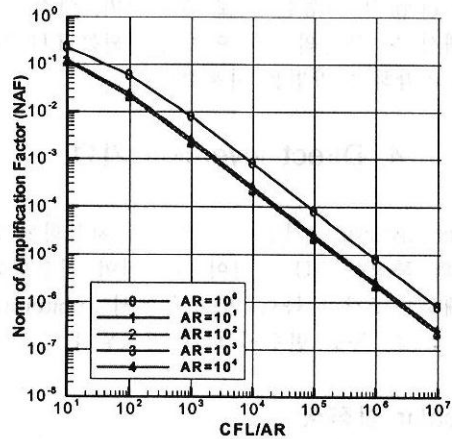


Fig. 2 Norms of amplification factor for direct inversion scheme of the Euler equations

5. AF error

AF error는 LU 기법의 damping rate와 direct inversion 기법의 damping rate의 차이로 표현될 수 있다:

$$AF \text{ error} = G_{LU} - G_{direct} \quad (13)$$

5.1 Scalar 방정식

Direct inversion 기법에 대한 해석처럼, AF error의 거동도 purely x and y directional wave에 대해서 각각 구분하여 쓸 수 있다. θAR 가 매우 큰 경우 ($\theta AR \gg 1$)에 대해서는 다음과 같다.

purely x directional wave:

$$AF-error_x = f\left(\frac{CFL}{AR}; \phi_x, \phi_y\right) \tag{14}$$

purely y directional wave:

$$AF-error_y = f(CFL, AR; \phi_y) \tag{15}$$

만약에 θAR 가 매우 작은 값을 갖는다면 ($\theta AR \ll 1$), 다음과 같이 표현될 수 있다.

purely x directional wave:

$$AF-error_x = f(CFL, AR; \phi_x) \tag{16}$$

purely y directional wave:

$$AF-error_y = f(CFL \times AR; \phi_y) \tag{17}$$

또한 direct inversion 기법의 해석에서와 같은 이유로 유동각이 큰 경우에 대해서는 x directional wave에 해당하는 AF error의 거동이 전체 AF error의 거동을 지배하며, 유동각이 작은 경우에 대해서는 y directional wave에 해당하는 AF error의 거동이 전체 AF error의 거동을 지배한다.

Direct inversion 기법에 대한 거동의 해석처럼, AF error에 대해서도 CFL 수가 무한대로 가는 경우에 대한 접근 거동을 알아보는 것은 중요하다. LU 기법에 대한 AF error는 CFL 수가 무한대로 증가더라도 단조적으로 증가하지 않고 어느 정도 증가하다가 더 이상 증가하지 않고 일정하게 유지되는 것을 수식을 통해서 알 수 있다.

지금까지의 고찰을 통해서 scalar 방정식에 대한 AF error의 거동은 다음과 같이 표현할 수 있다.

for $\theta AR \gg 1$:

$$AF\ error = \begin{cases} f\left(\frac{CFL}{AR}; \phi_x, \phi_y\right) \\ f(\phi_x, \phi_y): as\ CFL \rightarrow \infty \end{cases} \tag{18}$$

for $\theta AR \ll 1$:

$$AF\ error = \begin{cases} f(CFL \times AR; \phi_x, \phi_y) \\ f(\phi_x, \phi_y): as\ CFL \rightarrow \infty \end{cases} \tag{19}$$

5.2 Euler 방정식

Direct inversion 기법에서와 같이, Euler 방정식에 대한 AF error의 거동도 flow angle이 큰 scalar 방정식의 거동과 거의 같으며 다음과 같이 쓰여 질 수 있다.

$$AF\ error = \begin{cases} f\left(\frac{CFL}{AR}; \phi_x, \phi_y\right) \\ f(\phi_x, \phi_y): as\ CFL \rightarrow \infty \end{cases} \tag{20}$$

6. LU 기법

LU 기법에 대한 amplification factor는 direct inversion 기법과 AF error의 amplification factor의 합으로 표현될 수 있다.

$$G_{LU} = G_{direct} + AF\ error \tag{21}$$

6.1 Scalar 방정식

Scalar 방정식에 대해서는 유동각의 크기에 따라 전혀 다른 거동을 보인다, 유동각이 큰 경우에 대해서, direct inversion 기법의 거동은 식 (10)으로 표현되며, AF error의 거동은 식 (18)로 표현된다. 따라서 식 (10)과 식 (18)을 전체적인 LU 기법의 거동을 표현하는 식 (21)에 대입하면 LU 기법의 거동을 표현하는 식을 얻을 수 있다.

for $\theta AR \gg 1$:

$$G_{LU} = \begin{cases} f\left(\frac{CFL}{AR}; \phi_x, \phi_y\right) \\ f(\phi_x, \phi_y): as\ CFL \rightarrow \infty \end{cases} \tag{22}$$

또한 유동각이 작을 때에도 같은 방법으로 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

for $\theta AR \ll 1$:

$$G_{LU} = \begin{cases} f(CFL \times AR; \phi_x, \phi_y) \\ f(\phi_x, \phi_y): as\ CFL \rightarrow \infty \end{cases} \tag{23}$$

6.2 Euler 방정식

Euler 방정식에 대한 direct inversion 기법의 거동과 AF error의 거동은 각각 식 (12)과 (20)로 표현되며, 이 두 식을 식 (21)에 대입하면 LU 기법에 대한 식을 얻을 수 있다.

$$G_{LU} = \begin{cases} f\left(\frac{CFL}{AR}; \phi_x, \phi_y\right) \\ f(\phi_x, \phi_y); \text{ as } CFL \rightarrow \infty \end{cases} \quad (24)$$

Fig. 3은 LU 기법이 적용된 Euler 방정식에 대한 대표적인 그림이다. CFL/AR가 일정하면 격자 종횡비에 상관없이 항상 일정한 amplification factor의 norm을 갖는 것을 볼 수 있다. 또한 CFL 수가 커짐에 따라 독립 변수들에 무관하게 발산이나 감소 없이 일정한 값을 갖는 것을 볼 수 있다. 따라서 식 (24)의 내용과 일치한다.

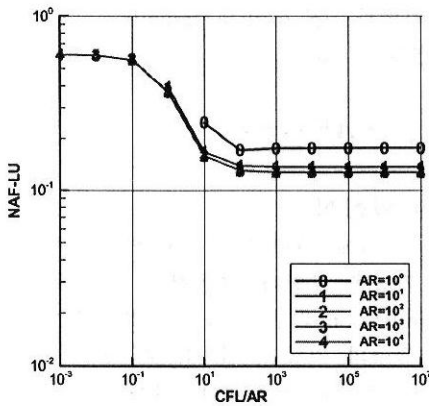


Fig. 3 Norms of amplification factor for the LU scheme of the Euler equations

이러한 고찰을 통해서, Euler 방정식에 대해서 격자 종횡비의 증가에 따른 수렴성 저하 현상을 제거할 수 있는 두 가지 방법을 제안할 수 있다. 첫 번째 방법은 격자 종횡비의 변화에 따라 CFL/AR 값이 일정하게 CFL 수를 변화시켜 주는 방법이며, 두 번째 방법은 높은 CFL 수를 사용하는 방법이다. 후자의 방법에서 높은 CFL 수를 사용하면, 불안정할 수 있지만 적절한 subiteration을 사용하면 이러한 불안정성을 쉽게 극복하면서 격자 종횡비의 증가에 따른 수렴성 저하 현상을 없앨 수 있다.

7. 계산 결과

Stability analysis의 결과들을 검증하기 위해 10% 압력 교란을 갖는 자유류의 유동에 대한 해석을 수행하였다. 자유류의 마하수는 0.5이며, 유동각은 변화

하는 격자 종횡비에 대해서 $\theta_{AR} = 10^0$ 의 값이 일정하게 유지될 수 있도록 조절하였다. 계산에 사용된 격자는 101×101 의 사각형 격자이다.

Fig. 4는 각각의 독립변수에 대해서 밀도 잔류치가 10개의 order 만큼 감소하는데 필요한 반복계산 회수를 보이고 있다. 본 계산에서 subiteration은 5번을 수행하였다. 그림에서 볼 수 있듯이 격자 종횡비가 변화하더라도 CFL/AR가 일정하면 수렴성이 거의 일정함을 볼 수 있다. 또한 높은 CFL 수에서는 격자 종횡비에 따라 CFL 수를 바꿔주지 않더라도 일정한 수렴성을 나타내고 있다. 이러한 거동은 stability analysis 결과와 일치한다.

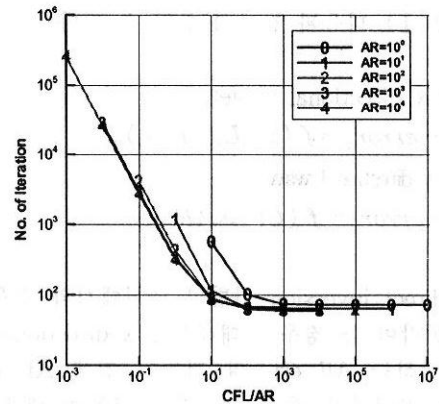


Fig. 4 Number of iterations required for the tenth-order residual reduction

8. 결론

본 연구에서는 von Neumann stability analysis 방법을 사용하여 비정렬 격자에 많이 쓰이고 있는 LU 기법의 수렴성 및 안정성에 관한 연구를 수행하였다. 적절한 scalar 모델 방정식의 해석을 통해서, Euler 방정식의 거동을 예측하는 방법을 사용하였다.

해석 결과를 통해서, Euler 방정식에 대해서는 격자 종횡비가 증가함에 따라 수렴성이 저하됨을 알 수 있었다. 또한 해석 결과를 바탕으로 하여 이러한 수렴성 저하 현상을 완화시킬 수 있는 두 가지 기법을 제안하였다. 첫 번째 방법은 격자 종횡비가 바뀌더라도 CFL/AR의 값을 일정하게 유지하는 방법이고, 두 번째 방법은 subiteration을 수행하면서 높은 CFL 수를 사용하는 방법이다. Euler 방정식에 대



한 실제적인 계산을 통해서 두 가지 방법 모두 적절함을 알 수 있었다.

참고문헌

- [1] Jespersen, D.C., "Design and Implementation of a Multigrid Code for the Euler Equations," *Applied Mathematics and Computation*, Vol.13, (1983), pp.357-374.
- [2] Buelow, P.E.O., Venkateswaran, S., and Merkle, C.L., "Grid Aspect Ratio Effects on the Convergence of Upwind Schemes," *AIAA Paper* 95-0565, (1995).
- [3] Wright, M.J., Candler, G.V., and Prampolini, M., "Data-Parallel Lower-Upper Relaxation Method for the Navier-Stokes Equations," *AIAA Journal*, Vol.34, No.7, (1996), pp.1371-1377.
- [4] Jameson, A. and Yoon, S.K., "Lower-Upper Implicit Schemes with Multiple Grids for the Euler Equations," *AIAA Journal*, Vol.25, No.7, (1987), pp.929-935.
- [5] Anderson, W.K. and Bonhaus, D.L., "An Implicit Upwind Algorithm for Computing Turbulent Flows on Unstructured Grids," *Computers and Fluids*, Vol.23, No.1, (1994), pp.1-21.