

허 훈  
한국과학기술대학

Finite Difference Limit Analysis of Circular Plates.

Hoon Huh  
Korea Institute of Technology

I. 서론

극한해석은 탄소성물체의 점근적 변형거동을 응력 한계를 주어 연구하는 분야이다. 극한해석은 응력 해석보다도 앞서서 개발되었으며 1950년대에는 화려한 전성기를 맞았었다. 수많은 이론과 정리가 수립되었으나 수학적 증명이 어려웠고 전산기가 개발되지 않아 실증예를 구하기가 어려워 극한해석의 필수성이 감소되었었다. 그러나, 1960. 70년대에 유한요소법의 눈부신 발전과 응용수학분야, 특히 변분원리와 함수치 해석의 발전으로 극한해석이 널리 응용될 수 있는 기반이 조성되었다. 특히 최근에는 많은 응용수학자들과 공학자들이 극한해석에 대한 연구를 활발히 전개하고 있다. 그 이유는, 탄소성물체의 복잡한 변형기구를 해석하기에는 우수한 전산기기도 엄청난 시간과 경비를 소비하여야 하기 때문이다.

본 연구에서는 현재까지 정립된 극한해석 이론을 바탕으로 새로운 해석방법을 도입하여 여러가지 균인 집중하중을 받을때의 원형평판을 축대칭 문제로 간주하여 해석하고자 한다. 모우멘트와 처짐을 집합이론에 의거 가용 집합요소로 보고 각 공간에서의 함수치의 극값이 결국 정해와 같아진다는 Duality theorem의 개념을 도입하여 계산치가 오차해석 없이 정해로 간주될 수 있도록 하며, 새로운 항복조건식의 도입으로 평판의 모우멘트와 굽힘, 처짐등에 대한 소성역에서의 물성에 정확히 맞는 항복조건을 부과할 수 있도록 하고자 한다. 요약하면, 본 연구의 목적은 극한해석의 이론적 확립과 해석방법의 개발로 앞으로 많은 분야에 응용될 극한해석의 기초이론을 정립하는데 있다.

II. 평판에 관한 극한해석 공식화

역학문제의 해는 정역학적 가용집합(S), 구성적 가

용집합(C) 및 운동학적 가용집합(K) 등 세가지 집합의 고집합에 속하는 요소를 볼 수 있다. 극한해석은 세가지 집합의 고집합을 해로 구하는 대신, 두가지 또는 한가지 집합으로부터 해를 구하는 방법으로, 이 극한해석의 타당성을 증명하기 위하여는 각각의 해가 동일함을 보여야 한다. 극한해석은 해를 구하는 집합의 선택에 따라 하계해석과 상계해석의 두가지로 구분된다.

2.1 하계해석

하계해석은 정역학적 가용집합에 속하는 지배방정식들, 즉 평행방정식과 항복조건식 및 정역학적 경계조건들로부터 해를 구하는 방법으로, 이로부터 함수치값(또는 매개변수값)의 최대치와 상응하는 정역학적 본포를 얻을 수 있다. 예를들면, 평판에 하중을 가하였을때 평행방정식과 항복조건식을 위배하지 않고 정역학적 가용집합내에서 최대하중을 구하는 것이다. 이를 공식화 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \text{maximize } q & (1) \\ & \text{subject to } \nabla \cdot (\nabla \cdot M) = q\phi(x, y) \\ & \quad \|M\|_{(\beta)} \leq M_0 \\ & \quad \text{static boundary conditions} \end{aligned}$$

이때 q는 비례하중계수이고  $\phi(x, y)$ 는 하중분포식이다.  $\|M\|_{(\beta)}$ 는 von Mises 항복조건식과 Frobenius norm의 항복조건식을 포함하는 일반적인 항복조건식으로  $\beta$ -norm이라 부른다. 이식을 평판에 관한 모우멘트 항복조건식으로 표현하면 아래와 같다.

$$\|M\|_{(\beta)} = \sqrt{M_1^2 - \beta M_1 M_2 + M_2^2} \quad (2)$$

위식은  $-2 \leq \beta \leq 2$ 의 값에 대하여 철면성(convexity)이 유지됨을 알 수 있다.

위 식을 균일집중하중이 가해질때의 최대칭 평판에 즉, 본모를 1로 표준화 하면, 관하여 자세히 기술하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \text{maximize } q \\ & \text{subject to } \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\theta) = \frac{q r}{2}, \quad 0 \leq r \leq a \\ & \qquad \qquad \qquad = \frac{q R}{2}, \quad a \leq r \leq R \\ & \qquad \qquad \qquad \sqrt{M_r^2 - \beta M_r M_\theta + M_\theta^2} \leq M_0 \\ & \qquad \qquad \qquad \text{boundary conditions for } M \end{aligned} \quad (3)$$

경계조건은 단순지지의 경우와 고정된 경우에 대하여 기술하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M_r(0) &= -\frac{1}{\sqrt{2-\beta}} M_0 \\ M_r(R) &= 0, \text{ 단순지지단} \\ M_r(R) &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta/4}} M_0, \text{ 고정단} \end{aligned} \quad (4)$$

앞서 유도된 최대와 문제는 원칙적으로는 유한차원 근사로 해를 구할 수 있으나, 실제로는 유한차원 문제의 규모와 환원기법의 해수범이 문제가 되므로 간단한 영역과 경계조건 문제에서만 해를 구할 수 있다.

## 2.2 상계해석

상계해석은 운동학적 가용집합내에서 해를 구하는 방법으로, 이로부터 함수치 값의 최소치와 상응하는 운동학적 본포를 얻을 수 있다. 이때 함수치는 그 최소치가 정해가 되도록 정역학적 가용집합의 구속조건을 함축적으로 포함시켜 운동학적 가용집합 내에서 설정한다. 따라서, 이를 위한 첫째 단계는 가상일의 원리에 의하여 평형방정식의 적분방정식 형태인 Weak form을 만드는 일이다. 즉,

$$\iint_B \omega \nabla \cdot (\nabla \cdot M) dA = q \iint_B \omega \phi dA \quad (5)$$

이 방법은 탄성해석에서의 Galerkin의 방법과 동일하며, 이때  $\omega$ 는 운동학적으로 가용한 임의의 처짐함수이다. 부분적분과 Divergence theorem 및 자연경계조건을 적용하면 위의 적분방정식은 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$q = \frac{\iint_B M : \nabla \nabla \omega dA}{\iint_B \omega \phi dA} \quad (6)$$

이때  $\nabla \nabla \omega$ 는  $\omega$ 에 대한  $2 \times 2$  Hessian(curvature) 행렬이며,  $M$ 는 본모와 본자에 동질성을 가지고 포함되어 있으므로, 본모가 1이 되도록  $M$ 를 조절할 수 있다.

$$\iint_B \omega \phi dA = 1 \quad (7)$$

따라서

$$q = \iint_B M : \nabla \nabla \omega dA \quad (8)$$

이 된다. 위식이 물리적 법칙을 위배하지 않고 최대치를 가질려면 구성적 가용집합을 만족하여야 한다. 구성적 가용집합에 속하는 항복조건식은 모우먼트에 대한 항복조건과 함께 직교조건(normality condition)에 의하여 극물형별  $\nabla \nabla \omega$ 와도 다음과 같은 관계식을 만족하여야 한다.

$$\begin{aligned} \frac{M_1}{\|M\|_{(p)}} &= \frac{k}{1-\beta/4} (K_1 + \frac{\beta}{2} K_2) \\ \frac{M_2}{\|M\|_{(p)}} &= \frac{k}{1-\beta/4} (K_2 + \frac{\beta}{2} K_1) \end{aligned} \quad (10)$$

이때,  $k$ 는 임의의 비례상수이다.  $q$  값이 최대가 되려면  $\|M\|_{(p)}$  값이 최대가 되어야 하므로 가장 합당하게 모우먼트 본포가 항복곡선상에 있다고 선정하면  $\|M\|_{(p)}$ 와  $k$ 의 값은 다음과 같이 되고

$$\begin{aligned} \|M\|_{(p)} &= M_0 \\ k &= \frac{\sqrt{1-\beta/4}}{\sqrt{K_1^2 + \beta K_1 K_2 + K_2^2}} \end{aligned} \quad (11)$$

정해가 되는  $q$ 의 최대치  $q^*$ 는 다음의 조건하에 있게 된다.

$$q^* \leq \bar{q} = \frac{M_0}{\sqrt{1-\beta/4}} \iint_B \|\nabla \nabla \omega\|_{(p)} dA \quad (12)$$

이때,  $\|\nabla \nabla \omega\|_{(p)} = \sqrt{K_1^2 + \beta K_1 K_2 + K_2^2}$  은 dual  $\beta$ -norm이라 부른다.

그러므로, 구하고자 하는 상계해석에 대한 공식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \bar{q} \\ & \text{subject to } \bar{q} = \frac{M_0}{\sqrt{1-\beta/4}} \iint_B \|\nabla \nabla \omega\|_{(p)} dA \\ & \qquad \qquad \qquad \iint_B \omega \phi dA = 1 \\ & \qquad \qquad \qquad \text{kinematic boundary conditions} \end{aligned} \quad (13)$$

위식을 균일집중하중이 가해질 때의 최대칭평판에 관하여 기술하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \tilde{q} \\ & \text{subject to } \tilde{q} = \frac{2\pi M_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \int_0^R \sqrt{\omega r^2 + \beta^2 \omega (a-r)^2 + \frac{1}{4} \omega^2} \frac{1}{r} dr \quad (14) \\ & 2\pi \int_0^R \omega 1(a-r) r dr = 1 \\ & \text{boundary conditions for } W \end{aligned}$$

이때,  $\phi(r) = 1(a-r) = \begin{cases} 1 & \text{when } r \leq a \\ 0 & \text{when } a < r \end{cases}$  인 분포함수이며,  $W = W(r)$  이므로  $W_r = \frac{dW}{dr}$ ,  $W_{rr} = \frac{d^2W}{dr^2}$  으로 표시하였다. 경계조건은 단순지지의 경우에 고정된 경우에 대하여 기술하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} W_{rr}(0) &= W_r(0) \\ W_r(0) &= 0 \\ W(R) &= 0, \text{ 단순지지단} \\ W_r(R) &= 0, W_r(R) = 0 \text{ 고정단} \end{aligned} \quad (15)$$

위에 유도된 최소화문제인 상계해석은 하계해석보다는 비교적 쉽게 유한차원 공간에서 해를 구할 수 있으며, 함수치를 직접 유한요소로 근사하여 최소화할 수 있다.

### 2.3 이원조건

앞절에서 유도된 하계해석과 상계해석에 대한 공식을 정리하면 다음과 같다. 즉, 하계해석은  $q$ 값의 최대치를 구하는 과정으로 이때 최적의 모우먼트분포를 정역학적 가용 집합조건을 만족하게 선택하여야 한다. 이를 공식화하면,

$$\begin{aligned} \max. \quad & q(M) \\ \text{s.t.} \quad & M \in L = S \cap C \end{aligned} \quad (16)$$

과 같이 된다.

상계해석은  $q$  값의 최소치를 구하는 과정으로 이때 최적의 처짐분포를 운동학적 가용집합 조건을 만족하게 선정하여야 한다. 이를 공식화 하면,

$$\begin{aligned} \min. \quad & \tilde{q}(W) \\ \text{s.t.} \quad & W \in K \end{aligned} \quad (17)$$

이제까지 유도된 평탄의 경우에는  $\beta$ -norm이 일종의 한계조건으로 사용되었는데 최대화공식(하계해석)에서는 모우먼트의 분포에 한계치를 가하는 조건으로  $\beta$ -norm이 사용되었는데 반해, 최소화공식(상계해석)에서는 함수치에 한계치를 가하는 조건으로 음의  $\beta$ 값을 가지는  $\beta$ -norm, 즉, dual  $\beta$ -norm이 사용된 것은 수학적으로 매우 흥미롭다. 상기한 두개의 공식을 조합하면 다음

과 같은 이원조건을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \max \quad & q(M) = q^* = \min \tilde{q}(W) \\ M \in L \quad & W \in K \end{aligned} \quad (18)$$

이 이원조건은 극한해석에서 가장 중요한 조건이며 필수적인 개념이다. 이 조건으로부터 상계해이거나 하계해이거나 최적해는 정해가 된다는 논리가 성립되는 것이다. 한쌍의 공간요소( $M^*$ ,  $W^*$ )는 앞서 기술한 이원조건을 만족시키는 해가 되며 이들은  $M$ 과  $W$ 에 대한 kuhn-Tucker 함수의 saddle point라고 불리운다.

## III. 수치해석과 최대화, 최소화 기법

앞절에서 유도된 하계해석과 상계해석은 유한차원 공간으로 근사하면, 적당한 최대화 또는 최소화 기법을 사용하여 반복형태의 계산과정을 거쳐 비교적 용이하게 해를 구할 수 있다. 이때 특이할 점은 적당한 공식화를 선행하면 상계해석과 하계해석의 수치해석과정이 매우 유사해 진다는 점이고, 양자의 최대화 또는 최소화 기법에 적면 Newton-Raphson 방법을 유사하게 적용할 수 있다는 점이다.

### 3.1 하계해석

하계해석에 대한 수치해석은 평형방정식과 항복조건식을 결합하여 만든 지배방정식을 유한차분법에 의하여 수행하였다. 지배방정식은 모우먼트 분포가 항복곡적 위에 있다고 간주하면 다음과 같이 일차상미분 비선형 방정식이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{dM_r}{dr} + \frac{1}{r} \left( \frac{\omega}{2} M_r - \sqrt{M_0^2 - (1-\beta^2) M_r^2} \right) &= \frac{q_r}{2}, 0 \leq r \leq a \quad (19) \\ &= \frac{q_a}{2r}, a \leq r \leq R \end{aligned}$$

위식은 일변수  $r$ 에 대한 방정식이므로  $r$ 에 대한 유한차분으로 근사하여  $M_r$ 의 분포를 구할 수 있다. 이때의 모우먼트 분포  $M_r$ 은 임의의 대개변수  $q$ 에 대한 분포이므로 경계조건을 만족시키지 못한다. 따라서,  $q$ 값의 변화에 따른 경계조건을 만족여부를 판별하여 각각의 경우에 대하여 경계조건을 만족시키는  $q$ 값을 적면 뉴턴 방법 등으로 구할 수 있다. 즉, 임의의  $q$ 값에 대한 경계에서의 모우먼트  $M_r$ 값과 경계조건으로 주어진  $M_r$ 값

의 차이를  $F(q)$ 라 하면,  $F(q) = 0$  가 되는  $q$ 를 구하기 위해서는 아래와 같이 뉴우튼의 방법을 약간 수정한 반복형태의 계산과정을 수행한다.

$$q_{k+1} = \frac{q_k + q_{k+1}}{2} - \frac{q_k - q_{k+1}}{2} \frac{F(q_k) + F(q_{k+1})}{F(q_k) - F(q_{k+1})} \quad (20)$$

이론적으로 차분치를 작게할수록 큰  $q$ 값을 얻을 수 있으므로 차분치가 작을수록 정해에 가까운  $q$ 값을 얻을 수 있으나 계산에 소요되는 시간을 고려하여 최적차분치를 선정하여 수치계산을 수행하였다.

### 3.2 상계해석

상계해석에 대한 수치해석은 상계함수치를 직접 유한 요소로 근사하여 최소화할 수 있으나, 다른 수치해석과 정은 변분법칙에 의한 수학적 기법을 최소화 공식에 응용하여 유한차원 공간으로 근사하는 방법이다.

상계해석에서 유도된 함수치는 변분계산에 따른 오일러 방정식(Enler's equation)을 구하여 함수치가 최소화되는 처짐분포  $W$ 를 구할 수 있다. 오일러 방정식을 구하여 적당히 변환시키면 아래와 같은 식을 얻는다.

$$\frac{d}{dr}(rP) - \frac{\beta}{2} P - \sqrt{1-\beta^2/4} \cdot \sqrt{1-P^2} = C \quad (21)$$

$$\text{이때 } P = (\gamma W_{rr} + \beta W_{rr}^2/2) / \sqrt{(\gamma W_{rr})^2 + \beta^2 W_{rr}^2 + (\omega_r)^2}$$

이며  $C$ 는 임의의 적분상수이다.

경계조건에서  $W_{rr}(0) = \frac{1}{r} W_r(0)$  이므로

$$P(0) = \frac{\sqrt{2+\beta}}{2} \quad (22)$$

가 된다.

$P$ 를 적분하기 위하여  $\theta = W_r$ 도 놓고, 적당히 변환시키면 다음과 같은 미분방정식을 얻는다.

$$r \frac{d\theta}{dr} + \left[ \frac{\beta}{2} - \sqrt{1-\beta^2/4} \frac{P}{\sqrt{1-P^2}} \right] \theta = 0 \quad (23)$$

경계조건에서

$$\theta(0) = W_r(0) = 0$$

가 되며, 고정단의 경우

$$\theta(R) = W_r(R) = 0 \text{가 된다.} \quad (24)$$

$\theta$ 는 쉽게 적분할 수 있으며  $W_r = \theta$ 로 부터  $W$ 를 구할 수 있다. 이때  $W(R) = 0$ 의 경계조건을 부과한다.

이 최소화 방법을 요약하면 아래와 같다.

1.  $C$ 값을 가정한다.
2.  $P(r)$ 을 적분하여 구한다.
3.  $\theta(r)$ 을 적분하여 구한다.
4.  $W(r)$ 을 적분하여 구한다.
5. 구속함수  $2\pi \int_0^R W r dr - 1 = 0$ 의 여부를 검사한다.
6.  $q(C)$  값을 계산한다.

이때, 구속함수의 조건이 만족되는가를 판별하기 위하여 하계해석에서의 이용한 적변뉴우튼 방법을 그대로 적용한다. 즉, 임의의  $C$ 값에 대한 구속함수의 값을  $F(C)$ 로 놓고  $F(C)=0$ 가 되는  $C$ 를 구하기 위하여 (20)식의 적변뉴우튼 방법을 똑같이 적용한다. 위의 최소화 과정을 통하여 수치계산을 하면  $q$ 의 최소값과 상응하는 처짐분포  $W$ 를 구할 수 있다. 이 경우에도, 이론적으로 차분치를 작게 할수록 작은  $q$ 값을 얻을 수 있으므로 차분치가 작을수록 정해에 가까운  $q$  값을 얻을 수 있으나 계산에 소요되는 시간을 고려하여 최적차분치를 선정하여 수치계산을 수행하였다.

### IV. 계산결과 및 고찰

수치계산은 앞절에서 언급한 바와 같이 원형집중하중이 가해지는 경우에 대하여 하계해석과 상계해석으로 나누어 수행하였다. 하계해석은 유한차분법으로 계산하였으며 차분치는  $h/R=0.01$ 에서  $h/R=0.001$ 까지 하중조건에 따라 변화시키며 계산을 수행하였다. 하중조건은  $a/R=1$ 에서  $a/R=0.001$ 까지 변화시키며 수치계산을 하였는데  $a/R=0.001$ 인 경우에는  $h/R=0.001$ 로 계산하여 수치적분이 불안정함을 보였다.

상계해석은  $P(r)$ ,  $\theta(r)$ ,  $W(r)$ 을 순차적으로 적분하여야 하는데  $h/R=0.02$ 도 하여 수치계산을 수행하였으며, 각 하계해석과 상계해석의 수치계산 결과는 2절의 이론조건에서 예견하였듯이 매우 근사하게 산출되었으며 따라서 상계해석이나 하계해석이나 모두 정해에 가까움을 보여주고 있다. 도표 1은 단순지지의 경우에 대하여 상계해와 하계해를  $\beta$ 를 변화시키며 구한 결과이다. 차분치를 더욱 작게하면 오차는 더욱 줄어들 것이며, 따라서 이 경우의 상계해와 하계해는 모두 정해로 간주할 수 있고, 상응하는 모우먼트 분포와 처짐분포도 정해로 간주할 수 있다.

하계해에서 구한 모우먼트의 분포는 그림 1과 그림 2에 상계해에서 구한 처짐의 분포는 그림 3에 단순지지의 경우와 고정단의 경우에 대하여 각각 예시하였다. 하계해석과 상계해석에서 구한 극한하중은 그림 4에 예시하였다.



$\mu$	Lower bound $q$	Upper bound $q$	error
0.0	4.998532	5.214663	0.043
0.1	5.098362	5.295584	0.040
0.2	5.183325	5.385068	0.038
0.3	5.256429	5.484592	0.035
0.4	5.412867	5.596005	0.034
0.5	5.548118	5.720942	0.033
0.6	5.668042	5.861981	0.032
0.7	5.834844	6.021981	0.032
0.8	6.047736	6.204817	0.034
0.9	6.292437	6.415734	0.034
1.0	6.424061	6.661482	0.037

도표 1. 하계해와 상계해의 비교(단순지지 균일하중)

그림에서 보는 바와같이 상계해와 하계해의 구분이 없이 그래프를 그렸는데 이는 앞에서 설명한 바와 같이 상계해와 하계해의 차이가 거의 없기 때문이다.

특이할 점은 하중이 원점부근으로 집중됨에 따라 전하중의 값은 감소함을 알 수 있는데 (이때, 물론  $q$  값은 증가한다) 이는 모우먼트 분포와 처짐분포에서 알 수 있듯이 하중의 집중에 따라 평판의 원점부근에서만 모우먼트 분포와 처짐의 급격한 변화가 일어나서 쉽게 붕괴되기 때문이다. 한편, 하중이 거의 원점에 집중되면 고정단의 경우나 단순지지 경우나 거의 같은 값을 갖게 되는데, 이는 모우먼트분포나 처짐의 변화가 원점부근에 집중되어 끝단의 지지조건이 거의 영향을 주지 못하기 때문인 것으로 판단된다. 결론적으로, 예시한 그림은 서론에서 설명한 공학적 응용분야에 있어서 원형평판으로 간주할 수 있는 구조물의 설계에 좋은 자료가 될 것이다.

## V. 결론

본 연구에서는 현재까지 정립된 극한해석이론을 근간으로 새로운 해석방법을 도입하여 극한해석에 대한 일반적 해석방법을 제안할 수 있는 기초를 마련하였다. 한편, 이원정리로부터 최소상계해가 최대하계해가 되고 따라서 정해가 된다는 것을 실재문제를 해석하여 증명하였다. 상계해석과 하계해석에서 거의 비슷하게 유한차분법을 수행하여 적변뉴우튼 방법으로 비선형해를 구한것도 특이할만하다. 이제까지의 연구결과를 종합하여 정리하면 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

- (1) 하계해석과 상계해석에 대한 체계적인 공식을 유도하였다.

- (2) 항복조건식으로  $\mu$ -norm을 적용하여 각종 재질의 평판에 있어서의 모우먼트와 굽힘 처짐등에 대한 소성역에서의 물성을 정확히 묘사할 수 있는 기초를 수립하였다.

- (3) 유도된 공식으로부터 수치계산 및 최대, 최소치를 구하는 방법을 상계해석과 하계해석에 같은 방법을 적용하여 수치계산 방법을 일원화 하였다.

- (4) 상계해석의 경우 함수치를 유도하고 유한요소법에 적용하였다.

- (5) 유도된 공식을 원형집중하중을 받는 원형평판에 적용하여 하중의 분포형태에 따른 극한하중값을 구하였으며 상응하는 모우먼트분포와 처짐분포를 구하여 원형평판으로 간주할 수 있는 구조물의 설계기준을 마련하였다.

주기: 본 연구는 과학재단의 연구지원을 받아 수행하였으며, 관계자 여러분께 감사드립니다.

## VI. 인용문헌

- 1) P. G. Hodge, Jr.  
'Plastic Analysis of Structures'  
McGraw-Hill, New York (1959)
- 2) D. C. Drucker, W. Prager, and H. J. Greenberg  
'Extended Limit Design Theorems for Continuous Media'  
Q. Appl. Math. Vol. 9 (1952) PP. 381-389
- 3) W. H. Yang  
'Minimization Approach to Limit Solutions of Plates' Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.  
Vol. 28 (1981) PP 265-274
- 4) E. Christiansen  
'Limit Analysis for Plastic Plates'  
SIAM J. Math. Anal. Vol. 11 (1980) PP 514-522
- 5) H. G. Hopkins and W. Prager  
'The Load Carrying Capacities of Circular Plates'  
J. Mech. Phys. Solids Vol. 2 (1953) PP. 1-13
- 6) G. Eason  
'Velocity Fields for Circular Plates with the von Mises Yield Condition'  
J. Mech. Phys. Solids Vol. 6 (1958) PP. 231-235

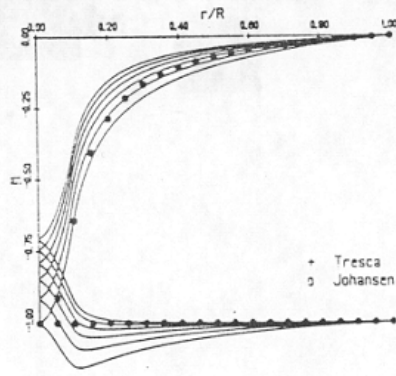
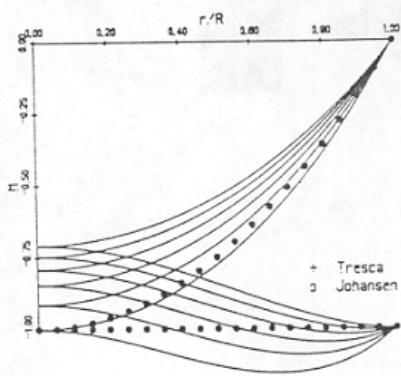


그림 1 모두면분포  
[단순지지]  
a=1.0  
a=0.1

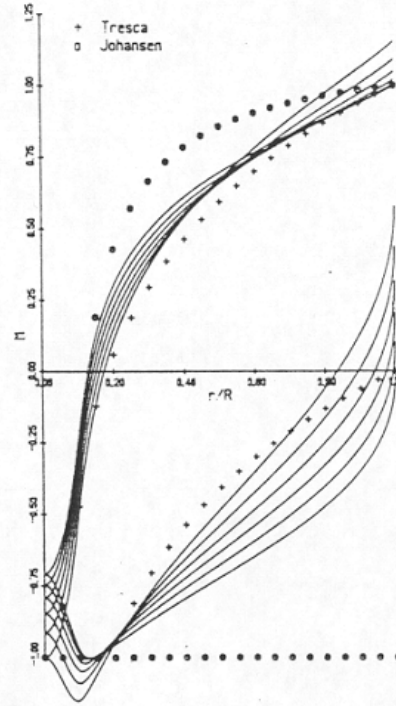
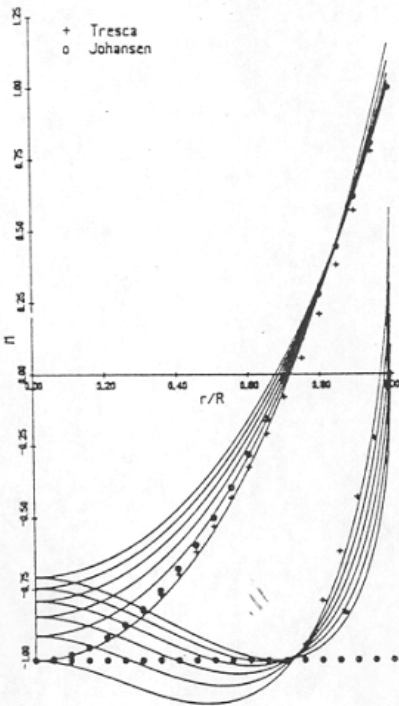


그림 2 모두면분포  
[고정단]  
a=1.0  
a=0.1

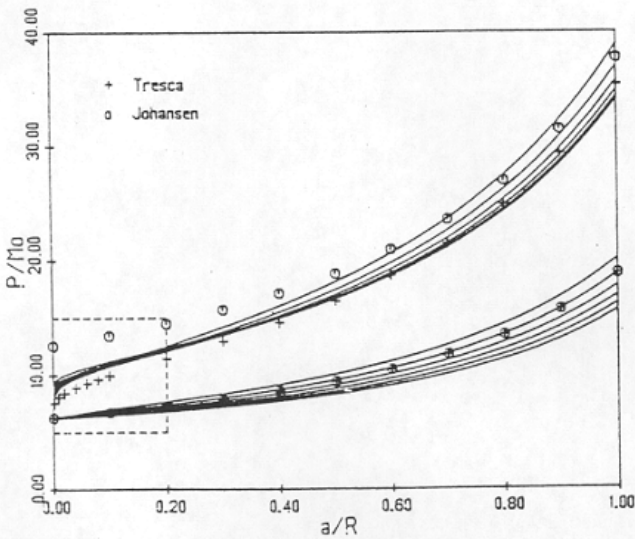


그림 4 원형집중하중에 따른 극한하중

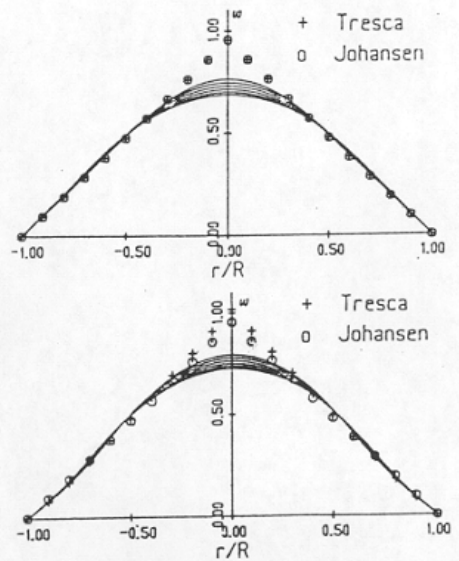


그림 3 처짐분포(단순지지, 고정단)