유한요소 극한해석 기법을 이용한 프레임의 붕괴거동 해석
(Collapse Analysis of Frames using Finite Element Limit Method)

김 현 섭*(한국과학기술원 기계공학과 대학원), 허 훈 (한국과학기술원 기계공학과)
Hyun-Sup Kim* (KAIST), Hoon Huh (KAIST)

Key Words : Collapse analysis (붕괴거동해석), Load-carrying capacity (하중지지능력), Frame structure (프레임 구조물), Finite element limit method (유한요소 극한해석 방법),

ABSTRACT : This paper discusses the collapse behavior of frames under quasi-static loading conditions. Based on the duality theorem in plasticity, the finite element limit analysis for three-dimensional structures is formulated. The analysis considers sequential deformation of frames with work-hardening effects. The collapse analysis of frames is conducted using finite element limit analysis program, and its results are compared with experiments. With various step sizes, the example studies demonstrate that the results show good agreement with each other in load-carrying capacity.

기호설명

q : 비례하중계수
σ_{ij} : 응력
σ_0 :초기항복응력
$\bar{\sigma}$:각 단계에서의 유효응력
ε_{ij} : 변형률
$\overline{\varepsilon^p}$:유효소성변형률
t_i : 분포하중
u_i : 속도장
$\| \|_{(v)}$: von-Mises norm
$\| \|_{(-v)}$: Negative von-Mises norm
K : 강성행렬
U 속도벡터
C : 하중 벡터
Λ : 벌칙함수 값(penalty function value)
λ : 라그란지 승수
n : 재료상수

1. 서론

극한해석은 소성해석 방법으로써, 구조물의 하중지지능력 및 붕괴모드 해석에 효율적인 방법의 하나이다. 구조물의 하중지지능력 해석을 위한 방법으로는 소성힌지방법과 탄소성해석 방법 등이 사용될 수 있다. 소성힌지방법[1]은 이상화된 힌지에 소성변형이 집중된다는 가정하에 해석을 수행하는 방법으로, 해석을 위하여는 해석자가 힌지의 위치 및 힌지에서의 힘-변위 관계 또는, 모멘트-굽힘각의 관계식을 반 실험적 방법(semi-empirical method) 등을 이용하여 사전에 결정해주어야 하는 어려움이 따른다. 이에 비하여 유한요소 극한해석 기법은 별도의 가정 없이 재료의 응력-변형률 관계만을 이용하므로 보다 편리하고 정확한 방법이라고 할 수 있다.

탄소성 증분해석은 매 계산 단계마다 복잡한 응력성분의 개선을 요구하는데 비하여, 극한해석은 기하학적인 형상의 개선만을 필요로 한다. 따라서, 극한해석은 탄소성 증분해석에 비하여 상대적으로 큰 증분크기(step size)를 사용할 수 있으므로, 구조물 내부의 상세한 응력분포보다는 붕괴하중과 붕괴모드만을 구하고자 하는 경우에 극한해석을 이용하는 것이 보다 효율적인 계산방법이 될 수 있다. 초기의 극한해석은 이론해(analytical solution)에 의존하여 완전 강소성 재료의 해석에 국한되는 한계를 가지고 있었으나[2], 최근에 와서는 순차적 극한해석 기법을 이용하여 재료의 변형경화 효과를 고려할 수 있게 되는 등 보다 일반화된 해석기법으로 발전되었다[3,4].

본 논문에서는, 3 차원 구조물에 대하여 재료를 강소성으로 가정하고, 가공경화를 고려한 극한해석의 유한요소 수식화를 수행하였다. 극한해석의 유한요소 수식화는 상계수식화로부터 유한차원 근사기법을 이용하였으며, 최소화 기법을 통하여 속도장 및 붕괴하중을 구하였다. 수치해석 예제로써 사각프레임과 원형 프레임에 대한 유한요소 극한해석을 이용한 수치해석을 수행하고, 수치해석 결과 얻어진 붕괴하중을 실험결과와 비교하여 수치

해석시에 각 단계에서 최대증분크기의 변화에 대하여 큰 영향 없이 좋은 결과를 나타냄을 확인 하였다.

2. 극한해석의 유한요소 수식화

2.1 극한해석 이론

극한해석은 하계해석과 상계해석으로 이루어져 있다. 하계정리와 상계정리는 이원정리에 의하여 하계해석의 최대치가 상계해석의 최소치와 같음이 증명되었다. 따라서, 수치적으로는 이중 어느 한 가지 방법만을 이용하여 해석을 수행할 수 있다[5].

하계해석은 정역학적 가용집합과 구성적 가용집합으로부터 해를 구하는 방법으로, 평형방정식과 정역학적 경계조건 및 항복조건식들로부터 함수값 또는 매개변수의 최대치와 그에 상응하는 응력분포를 구하게 된다. 하계해석을 수식화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\textit{maximize} \quad q(\sigma) \\ &\textit{subject to} \ \nabla\cdot\sigma = 0 \qquad in \ D \\ &\qquad \sigma_{ji}\, n_j = q\, t_i \qquad in \ \partial D_S \\ &\qquad \|\sigma\|_{(v)} \le \sigma_0 \qquad in \ D \end{aligned} \tag{1}$$

하계해석은 유한차원근사에 의하여 수치해석이 가능하나, 응력공간에서 해를 구해야 하므로 비효율적이고 실용성이 없다. 따라서, 과정이 용이한 상계해석을 이용하여 극한해석을 수행하는 것이 일반적이다.

상계해석은 운동학적 가용속도장으로부터 변형률속도를 구하여 구성방정식으로부터 적합하는 응력을 구하고, 이 응력이 이루는 변형일률과 외력이 하는 일률을 같다고 놓아 운동학적으로 허용되는 하중을 구하게 된다. 이와 같이 구해진 하중은 정해상의 상계치를 주게 되어 목적함수의 최소치와 이에 상응하는 속도장을 구할 수 있다. 이때, 하계해석의 가용집합 조건을 함축적으로 포함시켜 운동학적 가용집합내에 설정하면 최적목표 함수인 목적함수의 최소치를 효과적으로 정해가 되게 할 수 있다. 상계해석의 수식화를 위해서 가상일의 원리를 이용하여 평형방정식을 적분방정식 형태의 약형으로 만들면 다음과 같다.

$$\int_D u_i \sigma_{ji,j}\, d\Omega = 0 \quad ,\forall u_i \tag{2}$$

운동학적 경계조건 및 발산정리를 이용하면 식 (2)로부터 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\int_D \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\, d\Omega = q\int_{\partial D_S} t_i u_i\, d\Gamma \tag{3}$$

또는

$$q = \frac{\int_D \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\, d\Omega}{\int_{\partial D_S} t_i u_i\, d\Gamma} \tag{4}$$

여기서, 식 (4)의 분모, 분자에 u 가 각각 외연적 및 내연적으로 포함되어 있으므로 식 (4)의 분포를 다음과 같이 정규화(normalization) 시킬 수 있다.

$$\int_{\partial D_S} t_i\, u_i\, d\Gamma = 1 \tag{5}$$

최대소성일 원리 또는 Hölder 부등식정리를 이용하면, $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \left|\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\right| \le \|\sigma\|_{(v)}\|\varepsilon\|_{(-v)} = \bar{\sigma}\,\bar{\varepsilon} \tag{6}$$

상계범함수 $q(\sigma)$ 는 다음과 같은 과정을 거쳐 구성될 수 있다.

$$\begin{aligned} q(\sigma) &= \int_D \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\, d\Omega \\ &\le \int_D \|\sigma_{ij}\|_{(v)}\|\varepsilon_{ij}\|_{(-v)}\, d\Omega \\ &\le \sigma_0 \int_D \|\varepsilon_{ij}\|_{(-v)}\, d\Omega \\ &= q(\tilde{u}) \end{aligned} \tag{7}$$

결국, 최종적인 상계수식화는 다음과 같은 형태를 갖게 된다.

$$\begin{aligned} &\textit{minimize} \quad q(\tilde{u}) \\ &\textit{subject to} \ \ q = \sigma_0 \int_D \|\varepsilon_{ij}\|_{(-v)}\, d\Omega \\ &\qquad \int_{\partial D_S} t_i\, u_i\, d\Gamma = 1 \\ &\qquad Tr(\varepsilon_{ij}) = 0 \\ &\qquad \textit{Kinematic boundary conditions} \end{aligned} \tag{8}$$

이원정리에 의하여 식 (8)에서의 $\tilde{q}(u)$ 의 최소치는 식 (1)에서의 $q(\sigma)$ 의 최대치와 같은 값을 갖는다.

2.2 유한요소 수식화

상계수식을 유한요소 근사화 하면 다음과 같다.

$$q(\tilde{u}) = \bar{\sigma}\int_D \|\varepsilon_{ij}\|_{(-v)}\, d\Omega + \Lambda\int_D u_{i,i}^2\, d\Omega \qquad (9)$$

여기서, Λ 는 벌칙함수 값으로 매우 큰 값을 가지며, 식 (9)의 우변에서 두 번째 항은 재료의 비압축성 조건을 만족시키기 위한 것이다.

유효변형률은 유한요소 근사화에 의하여 다음과 같은 행렬식으로 나타내어질 수 있다.

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}} = \sqrt{[U]^{\mathrm{T}}[K_1^e][U]} \qquad (10)$$

한편, 체적변형률은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = [K_2^e][U] \qquad (11)$$

식 (10)과 (11)을 이용하여 식 (9)의 목적함수 $\tilde{q}(u)$를 근사화 하면 다음과 같다.

$$\tilde{q}(u) = \sum_{e=1}^{E}\left\{[U]^{\mathrm{T}}[\hat{K}_1^e][U] + [U]^{\mathrm{T}}[\hat{K}_2^e][U]\right\} \qquad (12)$$

여기서

$$[\hat{K}_1^e] = \bar{\sigma}\int_{D_e}[K_1^e]\, d\Omega \qquad (13)$$

$$[\hat{K}_2^e] = \Lambda\int_{D_e}[K_2^e]^{\mathrm{T}}[K_2^e]\, d\Omega \qquad (14)$$

식 (12)를 반복기법으로 풀기 위하여 다음과 같이 전 반복과정의 값이 분모에 포함된 형태로 변환시킨다.

$$\left([\hat{K}_1^e]\right)_n = \int_D \frac{\left([K_1^e]\right)_n}{\left(\sqrt{[U]^{\mathrm{T}}[K_1^e][U]}\right)_{n-1}}\, d\Omega \qquad (15)$$

여기서, n-1 은 전 반복과정을 나타내며, n 은 현재의 반복과정을 나타낸다. 결국 식 (8)은 구속이차 문제로 변환되어 다음과 같은 간단한 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \tilde{q}(U) = [U]^{\mathrm{T}}[K][U] \\ &\text{subject to } [C]^{\mathrm{T}}[U] = 1 \end{aligned} \qquad (16$$

2.3 최소화 기법

식 (16)의 구속조건이 있는 최소화문제는 라그란지 승수를 이용하여 다음과 같이 비구속 최소화 문제로 변환시킬 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad \Phi(U) = &[U]^{\mathrm{T}}[K][U] \\ &- 2\lambda\left([C]^{\mathrm{T}}[U] - 1\right) \end{aligned} \qquad (17)$$

n 번째 반복과정에서의 해는 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$[U]_n = \lambda[K]^{-1}[C] = \frac{[K]^{-1}[C]}{[C]^T[K]^{-1}[C]} \qquad (18)$$

$$\tilde{q}_n = [U]^T[K][U] = \lambda_n \qquad (19)$$

2.4 가공경화효과의 고려

재료의 가공경화 효과를 고려하기 위하여는, 각 단계마다 유효응력값은 일정한 것으로 가정하여 반복과정 내에서 유효응력값은 변하지 않는 것으로 근사하여 해석을 수행한다. 단, 각 단계의 유효응력은 이분탐색법(bisection method)을 이용하여 반복과정으로부터 구한 유효변형률에 근거하여 크기를 결정한다[6,7,8]. 이와 같이 계산된 유효응력은 항상 유효응력-유효변형률 곡선위에 있게 되므로, 계산된 유효응력이 유효응력-유효변형률 곡선의 궤적위에 있는지 검토할 필요가 없으며, 적당량의 변형률 증분에 대해서도 계산오차가 누적되는 것을 방지하여 신뢰성 있는 결과를 얻을 수 있다. 각 단계에서의 유효변형률 증분값은 최대치를 설정함으로써 계산오차를 줄일 수 있다. 각 단계에서의 유효응력은 단순인장실험결과 얻어진 데이터를 다음과 같은 형태의 유효응력-유효변형률 관계식으로 근사하여 사용하였다.

$$\bar{\sigma} = \sigma_o(1 + A\,\bar{\varepsilon}^p)^n \qquad (20)$$

3. 수치해석

유한요소 극한해석을 이용한 사각프레임과 원형프레임의 붕괴거동해석을 위하여 단순인장실험으로부터 각각의 물성치를 구하였다. 실험결과, 사각프레임의 경우 초기 항복응력은 340MPa, 원형프레임의 경우는 350MPa 이었다. Fig. 1 과 2 는 단순인장 실험으로부터 구해진 유효응력-유효변형률 곡선을 나타낸다.

각각의 프레임의 기하하적 형상은 Fig. 3 과 Fig. 4 에 보여진 바와 같다. 프레임에 대한 붕괴실험은 팁(tip)의 폭이 1mm 인 쐐기형상 펀치로 프레임 중앙부분에 하중을 가하여 하중-변위곡선을 구하였다.

유한요소 극한해석을 이용한 해석은 각 프레임의 중앙부위에 변위경계조건을 부여하여 붕괴하중

과 붕괴모드를 계산하였다. 또한, 각 단계에서의 최대 유효변형률 증분 크기를 0.2%에서 2%, 10%로 변화시키면서 얻어진 하중을 실험결과와 비교하였다.

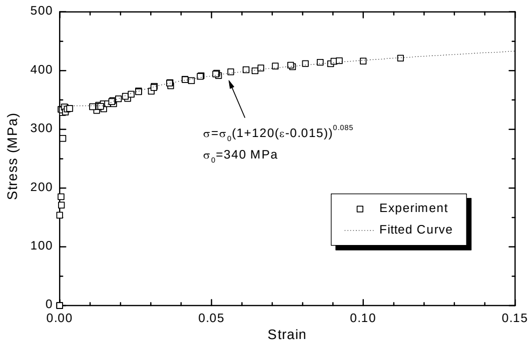


Fig. 1 Effective stress–strain relation for a square frame.

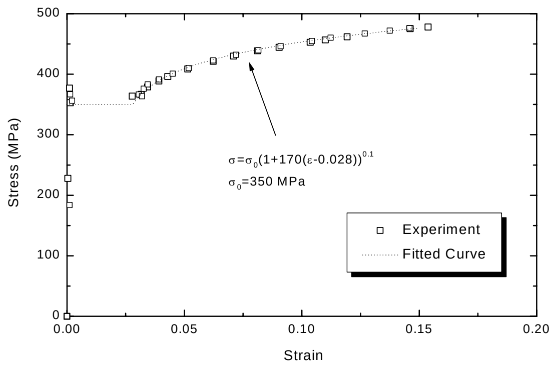


Fig. 2 Effective stress–strain relation for an arc frame.

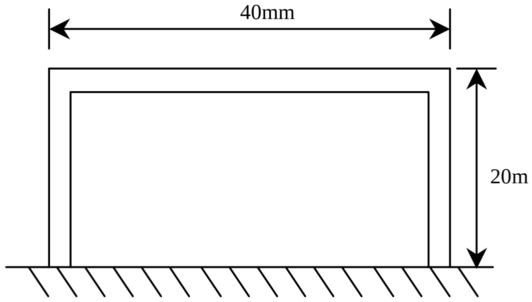


Fig. 3 Geometry of an arc frame.

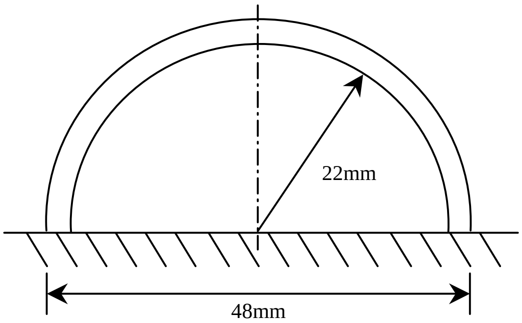


Fig. 4 Geometry of a square frame.

3.1 사각프레임의 붕괴거동해석

실험 및 해석에 사용된 사각프레임은 1.35mm × 1.35mm 의 정 사각 단면을 가진다. 수치해석결과 Fig. 5 에 나타난 바와 같이 초기의 하중 값이 다소 차이를 보임을 알 수 있는데, 이는 유한요소 극한해석을 이용한 붕괴하중 계산에 있어 재료의 탄성영역을 무시하였기 때문으로 여겨진다. 그러나, 변형이 진행됨에 따라 수치해석결과 실험결과가 근사한 값을 나타냄을 볼 수 있다.

각 단계에서의 최대 변형률증분 크기를 0.2%, 2%와 10%로 제한하여 해석한 경우 수렴속도가 다소 낮아지는 경향을 보이기는 하였으나, 해의 정확도에 있어서는 큰 차이를 보이지 않음을 알 수 있다. 이는 앞서 밝힌 바와 같이 유한요소 극한해석의 경우, 탄소성 해석과 달리 변형률증분의 크기가 증가해도 해의 정확도에 큰 영향을 받지 않음을 보여주는 것이라 하겠다. Fig. 6 은 프레임 중앙부 상단의 변위가 10mm 일 때의 변형된 형상을 나타낸 것이다.

3.2 원형프레임의 붕괴거동해석

실험 및 해석에 사용된 원형프레임은 2mm × 2mm 의 정 사각단면을 가진다. Fig. 7 은 원형프레임의 변위에 따른 붕괴하중곡선을 나타낸 것이다. 변형초기에 나타나는 실험결과와의 차이는 앞서 언급한 바와 같이 재료의 탄성을 무시하였기 때문으로 여겨진다. 변형이 진행되면서 수치해석으로부터 얻어진 하중값은 실험결과와 매우 유사한 경향을 나타내었다. Fig. 8 은 프레임 중앙부 상단의 변위가 10mm 일때의 변형된 형상을 나타낸 것이다.

4. 결 론

사각프레임과 원형프레임에 대하여 유한요소 극한해석을 이용한 붕괴거동해석을 수행하고 실험결과와 비교하였다. 수치해석 결과, 유효변형률의 최대 증분크기를 각각 0.2%, 2% 및 10%로 제한한 경우 붕괴하중에 있어 실험결과와 근사한 값이 얻어짐을 알 수 있었다. 이는 앞서 서론에서 밝힌 바와 같이 매 계산단계마다 응력성분의 개선을 필요로 하지않고, 단지 기하학적인 형상과 유효응력만을 개선하여 해석하는 극한해석의 특성 때문이다. 따라서 유한요소 극한해석은 구조물 내부의 상세한 응력분포 이외에 변형에 따른 붕괴하중과 붕괴모드만을 구하고자 할 때, 매우 효율적인 해석 방법임을 확인할 수 있었다.

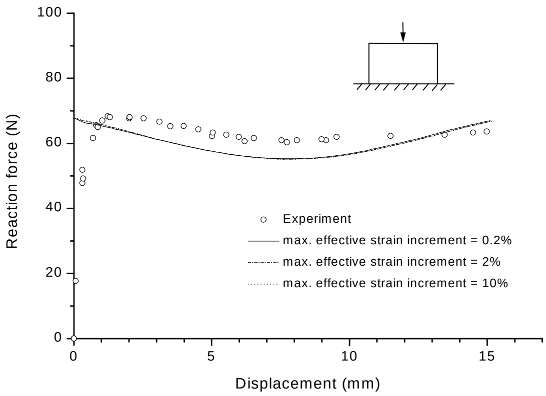
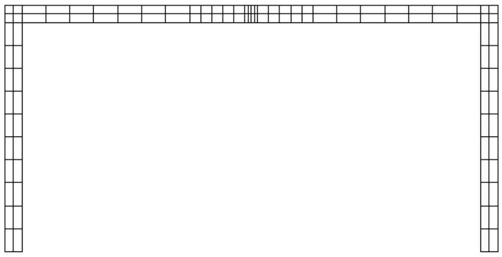
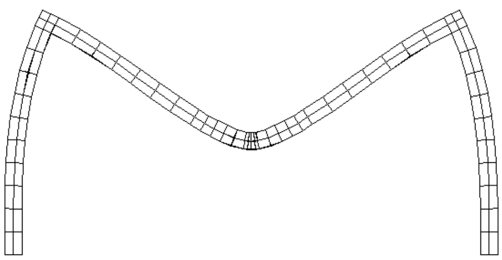


Fig. 5 Collapse load of a square frame.



(a) undeformed shape



(b) deformed shape when displacement = 10mm

Fig. 6 Undeformed and deformed shape of a square frame.

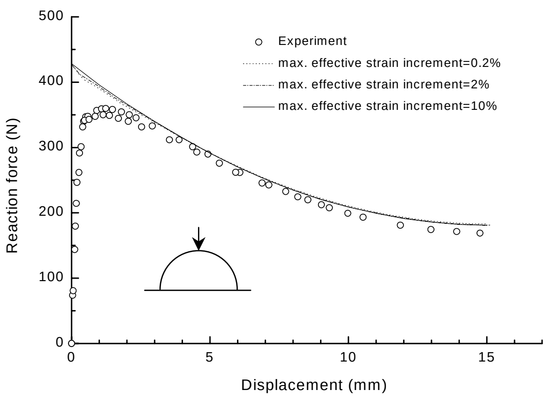
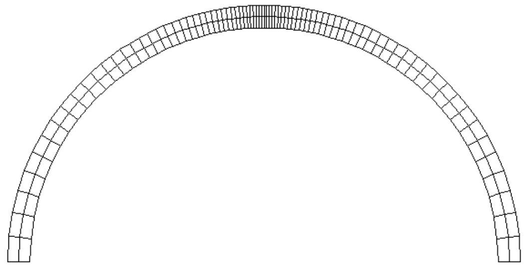
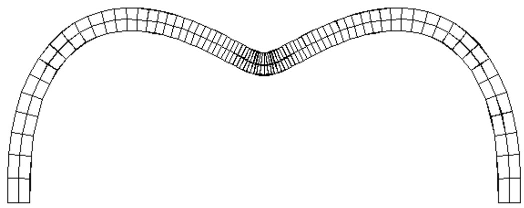


Fig. 7 Collapse load of an arc frame.



(a) undeformed shape



(b) deformed shape when displacement = 10mm

Fig. 8 Undeformed and deformed shape of an arc frame.

참고문헌

(1) McIvor, I. K., Wineman, A. S. and Wang, H. C., 1977, "Plastic Collapse of General Frames," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 13, pp. 197-210.

(2) Liu, Y. H., Cen, Z. Z. and Xu, B. Y., 1995, "A Numerical Method for Plastic Limit Analysis of 3-D Structures," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 32, No. 12, pp. 1645-1658.

(3) Huh, H. and Lee, C. H., 1993, "Eulerian Finite Element Modeling of the Extrusion Process for Work-hardening Materials with the Extended Concept of Limit Analysis," *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 5, pp.51-62.

(4) Yang, W. H., 1993, "Large Deformation of Structures by Sequential Limit Analysis," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 30, No. 7, pp. 1001-1013.

(5) Huh, H. and Yang, W. H., 1991, "A General Algorithm for Limit Solutions for Plane Stress Problems," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 28, pp. 727-738.

(6) 김현섭, 허 훈, 1998, "유한요소극한해석을 이용한 단순차체모델의 붕괴거동해석," 한국자동차공학회논문집, 제 6 권, 제 5 호, pp. 1-9.

(7) Huh, H., Lee, C. H. and Yang, W. H., 1998, "A General Algorithm for Plastic Flow Simulation by Finite Element Limit Analysis," *International Journal of Solids and Structures* (in print).

(8) Kim, H. S. and Huh, H., 1998, "Vehicle Structural Collapse Analysis using a Finite Element Limit Method," *International Journal of Vehicle Design*, (accepted).