

옵션의 복제 위험과 변동성 스마일 현상:
S&P 500 주가지수 옵션을 이용한 실증분석
(Risky Dynamic Replication and Volatility Smile:
Empirical Evidence from S&P 500 Index Option)

2008년 8월

박재원*, 김동석**

본 연구는 변동성 스마일 현상을 옵션의 복제 위험의 관점에서 설명하고자 시도하였다. 변동성 스마일은 기초자산의 분포가 정규분포보다 왜도가 낮고, 첨도가 높기 때문에 관측되는 현상으로 알려져 있으며, 이를 설명하기 위한 여러 가지 동적 무차익거래 모형들이 개발되어 왔다. 그러나 무차익거래 모형들은 옵션이 기초자산에 의하여 완벽하게 복제될 수 있다는 비현실적인 가정에 근거하고 있으며, 실증분석 결과에서도 변동성 스마일 현상을 부분적으로밖에 설명하지 못하는 단점을 지니고 있다. 반면 거래비용이 존재하고, 기초자산을 연속적으로 거래할 수 없는 경우, 옵션은 완벽하게 복제될 수 없으며 변동성 스마일은 복제 오차에 대한 투자자들의 위험회피성향이 옵션가격에 반영된 결과로 해석할 수 있다.

이를 확인하기 위하여 S&P 500 지수옵션을 시장가격에 매도하고 이를 만기까지 헤지하는 헤지 포트폴리오의 수익률을 복제오차로 정의하고 이에 대한 실증분석을 실시하였다. 그 결과 헤지 포트폴리오 수익률의 분포는 가격도별로 크게 다르지만, 수익률의 평균차이는 분산차이와 왜도차이로 설명될 수 있음을 확인하였다. 복제오차에 대한 투자자의 위험회피성향을 반영하기 위하여 서로 다른 수익률 분포가 기대효용의 관점에서 동일하다는 귀무가설 검정한 결과 귀무가설을 기각할 수 없었다. 이와 같은 결과는 헤지 모형에 관계없이 모두 동일하게 관측되었다.

핵심단어: 변동성 스마일, 복제 오차, 헤지 포트폴리오, 복제 위험, 위험회피성향

본 논문은 제 1회 CITI-KAIST 논문공모전의 지원을 받아 작성되었음

* 한국과학기술원 금융전문대학원 박사과정, E-mail: rouggh@business.kaist.ac.kr

** 한국과학기술원 금융전문대학원 부교수, E-mail: tskim@business.kaist.ac.kr

1. 서론

변동성 스마일 (Volatility Smile)은 옵션 시장 투자자와 연구자 모두에게 완전하게 풀리지 않는 과제이다. 변동성 스마일은 Black-Scholes (1973) 모형으로 계산한 옵션의 내재변동성이 옵션의 행사가격과 만기에 따라 서로 다르게 나타나는 현상을 말한다. 1987년 이후 S&P 500 지수옵션의 경우 행사가격이 높을수록 내재변동성이 낮아지는 경향을 보이며, 그 정도는 옵션의 만기별로 다소 차이를 있다. 개별주식 옵션의 경우에는 등가격 옵션 (At-the-money Option)을 중심으로 내가격 옵션 (In-the-money Option)과 외가격 옵션 (Out-of-the-money option)의 내재변동성이 대칭적으로 상승하는 형태를 나타내는 것으로 보고되고 있다.

변동성 스마일은 기초자산의 수익률의 분포가 Black-Scholes의 가정과는 달리 정규분포를 따르지 않기 때문에 관측되는 것으로 해석하는 것이 일반적이다. 주식시장의 경우, 기초자산 수익률의 왜도 (Skewness)가 음의 값을 갖으며, 첨도 (Kurtosis)는 정규분포의 첨도보다 높게 나타난다는 것은 잘 알려진 사실이다. 추계적 변동성 (Stochastic Volatility)모형과 점프 (Jump)모형은 기초자산 수익률 분포의 비정규성을 모형화하기 위하여 가장 널리 사용되어왔다. Hull, White (1987)는 변동성이 Cox, Ingersoll, Ross (1985)의 이자율 모형과 같은 제곱근평균회귀과정 (Square-root Mean-reverting Process)을 따른다고 가정하여 옵션가격의 근사해를 계산하는 모형을 개발하였으며, Heston (1993)은 동일한 형태의 변동성 과정을 푸리에 변환 (Fourier Transformation)을 이용하여 폐쇄해 (Closed-form Solution)을 도출하였다. Heston 모형에서 기초자산과 변동성과정의 상관계수는 기초자산 수익률의 왜도와 관계가 있으며, 평균회귀속도 (Speed of Mean-reversion) 및 변동성의 변동성 (Volatility of Volatility)은 기초자산 수익률의 첨도와 밀접한 관계가 있다. Heston 모형은 여러 가지 모수들의 조합에 따라 다양한 형태의 변동성 스마일을 설명할 수 있기 때문에 이후의 여러 실증연구에서 사용되고 있다. 기초자산 가격이 점프 과정 (Jump Diffusion Process)을 따르는 경우의 옵션평가모형은 Merton (1976), Ball, Torous (1983, 1985), Amin (1993), Bates (1991) 등에 의하여 개발되었다. Merton은 분산가능하고 (Diversifiable) 개별적 (Idiosyncratic) 점프 모형을 주장한 반면, Bates는 비대칭적이고 (Asymmetric) 체계적 (Systemic) 점프 위험을 고려한 옵션평가모형을 유도하였다. Pan (2002)는 S&P 500 지수옵션 자료를 이용하여 점프 프리미엄이 변동성 스마일 현상을 설명할 수 있음을 보고하였다.

그러나 추계적 변동성 모형과 점프 모형을 이용한 실증분석 결과는 변동성 스마일 현상을 완전하게 설명하지 못하고 있다. Bakshi, Cao, Chen (1997)은 S&P 500 지수옵션과 추계적 변동성 모형, 추계적 변동성 및 점프 모형을 이용하여 실증분석을 실시하고, 순간상관계수 및 변동성의 변동성 모수의 대표본 추정결과를 바탕으로 추계적 변동성 모형이 적합하지 않음 (Misspecified)을 보고하였다(p2026). 즉,

옵션가격을 이용하여 추정된 모수들을 살펴보면 옵션가격에 내재된 기초자산의 왜도는 지나치게 낮게, 첨도는 지나치게 높게 평가되고 있음을 알 수 있다. 기초자산과 변동성 사이의 상관계수는 내재변동성과 기초자산 수익률의 시계열을 통하여 계산된 결과와 비교하여 매우 낮으며 (-0.64와 -0.28), 변동성의 변동성은 Bates (2001)와 같이 최우추정법으로 추정된 결과와 비교하여 지나치게 높게 나타난다 (0.39와 0.1). Corrado, Su (1996)는 Jarrow, Rudd (1982)과 유사한 방법으로 왜도와 첨도를 조정한 옵션가격을 계산하는 한편, 옵션가격에 내재된 왜도 (Implied Skewness)의 크기를 추정하였다. S&P 500 지수옵션에 대한 1990년 자료를 이용한 결과로부터 내재왜도의 크기는 -1.39로 추정되었다. 그러나 1996년부터 2006년까지 S&P 500 지수 수익률로부터 직접 추정된 왜도의 크기는 10분의 1도 되지 않는 -0.1 수준이다. Jackwerth (2000)는 위험중립확률에서 옵션가격을 이용하여 위험회피계수 (Risk Aversion Coefficient)를 계산한 결과 다른 연구에서 보고된 결과와 매우 상이한 결과가 나타남을 보고하였다. Eraker, Johannes, Polson (2004)은 추계적 변동성 및 기초자산의 점프모형이 변동성과정의 급격한 변화를 설명할 수 없다고 지적하고, 기초자산뿐만 아니라 변동성에도 점프를 추가한 추계적 변동성 및 이중 점프 (Stochastic Volatility and Double Jumps) 모형을 제안하였다. 이들은 최우추정법 (Maximum Likelihood Estimation)으로 S&P 500 지수 및 Nasdaq 100 지수에 대한 실증분석을 실시하여 추계적 변동성 및 이중 점프 모형이 기존의 모형보다 설명력이 높다고 보고하였으나 옵션자료를 이용한 실증분석은 실시하지 않았다.

한편, Bollen, Whaley (2004)는 추계적 변동성 및 점프를 이용하여 변동성 스마일을 설명하려는 무차익거래모형 (No-arbitrage Model)의 약점을 지적하였다. 무차익거래모형에 의하면 옵션은 기초자산과 채권에 의하여 완벽한 동적 복제 (Dynamic Replication)가 가능하기 때문에 옵션의 공급곡선은 수평을 이룬다. 그러나 현실에서 동적복제를 실시하는 경우 여러 가지 제약으로 인하여 복제오차가 발생하기 때문에 옵션에 대한 수요가 공급을 초과하면 옵션가격은 상승한다. Bollen, Whaley는 S&P 500 지수옵션과 개별주식옵션을 이용하여 내재변동성의 변화와 초과매수압력 (Net Buying Pressure) 사이에 강한 관계가 존재하고, 차익거래한계 (Limits to Arbitrage)를 그 원인으로 보고하였다. 또한, 풋옵션에 대한 초과매수압력 존재하는 S&P 500 지수옵션의 경우, 외가격 풋옵션을 매도하고 이를 기초자산으로 헤지하는 전략이 매우 높은 양의 비정상수익 (Abnormal Return)을 거둘 수 있다고 보고하였다.

본 연구는 Bollen, Whaley (2004)의 연구를 확장하여 다음의 세 가지 질문에 대한 설명을 시도하였다. 첫째, 실증적으로 추계적 변동성 모형이 옵션 시장을 잘 설명하지 못하는 이유는 무엇인가? 이론적으로 추계적 변동성 모형이 기초자산의 비정규성과 다양한 형태의 변동성 스마일을 설명할 수 있음에도 불구하고, 실증분석결과가 만족스럽지 못한 이유는 기초자산 수익률의 왜도 및 첨도의 영향을 증폭시키는

요인에 옵션시장에 반영되었다고 볼 수 있다. 둘째, 옵션가격이 옵션시장의 수요공급에 의하여 영향을 받는 이유는 무엇인가? Bollen, Whaley는 S&P 500 지수옵션의 경우 포트폴리오 보험에 대한 수요에 의하여 풋옵션에 초과매수압력이 존재한다고 보고하였으며, 초과매수압력이 차익거래한계에 의하여 설명될 수 있다고 주장하였다. 본 연구는 Bollen, Whaley가 지적한 차익거래의 제약사항이 무엇이며, 이것이 옵션가격에 어떠한 영향을 주는지 밝히고자 한다. 셋째, 외가격 풋옵션을 매도하고 기초자산으로 헤지하는 전략의 비정상수익이 존재하는 이유는 무엇인가? 여러 선행 연구로부터 외가격 풋옵션이 고평가되어 있다는 근거가 제시되고 있으며 특히 Bollen, Whaley (2004)는 비정상수익을 5% 이상으로 보고하였다. 본 연구는 이와 같은 양의 비정상수익에도 불구하고 외가격 풋옵션에 대한 초과매수압력이 발생하는 이유를 조사하고자 한다.

위의 세 가지 질문에 대답하기 위하여 본 연구는 옵션가격을 이산적 복제비용 (Discrete Replicating Cost)의 측면에서 접근하였다. 먼저 헤지 포트폴리오 (Hedge Portfolio)를 옵션 한 계약에 대한 매도포지션과 이에 대한 헤지로서 기초자산에 대한 포지션의 합으로 정의하자. Black, Scholes (1973)의 가정하에서 연속적으로 재조정되는 헤지 포트폴리오의 만기수익은 0에서 축퇴분포 (Degenerated Distribution)를 나타내어야 한다. 따라서 옵션가격은 무차익거래모형의 가격과 동일하다. 그러나 현실에서 옵션가격은 무차익거래모형의 가격에서 벗어날 수 있는 두 가지 가능성을 갖고 있다. 첫째, 옵션 포지션에 대한 복제 포트폴리오를 연속적으로 재조정할 수 없다. 무차익거래모형의 가정과는 달리 현실에서는 거래비용이 존재하고 기초자산을 연속적으로 거래하는 것이 불가능하므로 헤지 포트폴리오 또한 연속적으로 재조정하는 것이 불가능하다. 둘째, 옵션가격이 변동성과 같이 거래되지 않는 요인에 의하여 영향을 받는다면 이에 의한 영향은 헤지할 수 없다. 추계적 변동성 모형에서와 같이 옵션가격이 변동성의 움직임에 영향을 받더라도, 시장에서 변동성이 거래되지 않기 때문에 옵션을 완벽하게 복제할 수 없다. 이러한 두 가지 영향에 의하여 옵션가격은 무차익거래모형 가격과 다르게 관측될 수 있다.

헤지 포트폴리오가 이산적으로 재조정되는 경우 복제 오차가 발생한다. 따라서 옵션 포지션을 기초자산으로 헤지하는 투자자는 복제 오차에 대한 위험을 감수해야 한다. 일반적으로 합리적인 투자자의 효용함수는 첫째, 부 (Wealth)에 대한 한계효용이 양수이고, 둘째, 한계 효용이 체감하며, 셋째, 절대 위험회피도가 증가하지 않아야 한다. 한계 효용이 체감한다는 것은 분산에 대한 위험회피성향을 나타내며, 절대 위험회피도가 증가하지 않는다는 것은 양의 왜도에 대한 선호를 나타낸다. 이와 같은 조건을 만족하는 효용함수를 갖는 헤지 포트폴리오 투자자는 헤지 포트폴리오의 수익률의 양의 분산 및 음의 왜도에 대한 프리미엄을 요구할 수 있으므로, 이러한 프리미엄은 옵션가격에 반영될 수 있다. 만약 복제 오차에 대한 프리미엄이 옵션가격에 반영되어 있다면 앞서 기술한 세 가지 질문에 대하여 다음과 같이 답변할

수 있다. 첫째, 무차익거래모형이 변동성 스마일 현상을 실증적으로 설명하지 못하는 까닭은 복제오차에 대한 프리미엄을 고려하지 못하기 때문이다. 둘째, 복제오차로 인하여 차익거래가 불가능하므로 옵션가격은 수요공급의 균형에 따라 결정될 수 있다. 이 때, 복제오차의 분산과 왜도에 대한 프리미엄이 옵션의 균형가격에 반영될 것이다. 마지막으로 외가격 풋옵션과 같이 특정 옵션이 다른 옵션과 비교하여 고평가되어 있다면 이 옵션에 대한 복제오차가 다른 옵션과 비교하여 그 분산이 크거나, 왜도가 작거나, 또는 두 가지 모두에 해당하기 때문이다.

이를 확인하기 위하여 본 연구에서는 S&P 500 지수옵션을 시장가격에 매도하고 이를 만기까지 헤지하는 헤지 포트폴리오의 수익률을 복제오차로 정의하고 이에 대한 실증분석을 실시하였다. 그 결과 헤지 포트폴리오 수익률의 분포는 가격도별로 크게 다르지만, 수익률의 평균차이는 분산차이와 왜도차이로 설명될 수 있음을 확인하였다. 또한 복제오차에 대한 투자자의 위험회피성향을 반영하기 위하여 서로 다른 옵션에 대한 헤지 포트폴리오 수익률 분포가 기대효용의 관점에서 동일하다는 귀무가설 검정한 결과 귀무가설을 기각할 수 없었다. 이와 같은 결과는 옵션평가모형에 관계없이 모두 동일하게 관측되었다.

본 연구의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 옵션의 헤지 포트폴리오를 이산적으로 재조정하는 경우 복제오차를 도출한다. 기초자산이 Black-Scholes 모형과 같이 로그정규 분포를 따르는 경우와 Heston의 추계적 변동성 모형을 따르는 경우로 나누어 살펴본다. 3장에서는 S&P 500 지수옵션을 이용하여 실증분석을 실시한다. S&P 500 지수옵션의 내재변동성 함수의 특성을 기술하고, 옵션을 시장가격에 매도하고 기초자산으로 헤지하는 헤지 포트폴리오의 수익률 분포를 조사한다. 4장에서는 헤지 포트폴리오의 수익률을 기대효용의 관점에서 동일한지의 여부를 검증한다. 5장에서는 본 연구의 결과를 요약하고, 향후 연구 과제를 제시한다.

2. 옵션의 복제오차

본 장에서는 복제오차의 측정치 (Measure)로써 이산적으로 (Discretely) 재조정하는 헤지 포트폴리오의 수익률을 도출하고, 그 분포적 특성을 살펴본다. 헤지 포트폴리오 (Hedge Portfolio)는 옵션 한 계약에 대한 매도포지션과 이에 대한 헤지로써 기초자산에 대한 포지션의 합으로 정의한다. 콜옵션의 헤지 포트폴리오는 콜옵션 한 계약을 매도하고, 기초자산을 매수하여 결과적으로 델타중립인 포트폴리오이다. 풋옵션의 헤지 포트폴리오는 풋옵션 한 계약을 매도하고, 기초자산을 매수한 포트폴리오이다. Black-Scholes (1973)의 가정과 같이 헤지 포트폴리오를 연속적으로 재조정할 수 있다면 헤지 포트폴리오는 무위험 포트폴리오와 같다. 그러나 현실에서는 헤지 포트폴리오를 연속적으로 재조정할 수 없기 때문에 헤지 포트폴리오는 더 이상 무위험 포트폴리오가 아니다. Bolye, Emanuel (1980)은 기초자산이 로그정규분포를 따르는 경우에 이산적으로 재조정하는 헤지 포트폴리오의 헤지 오차의 분포는 치우친 분포 (Skewed Distribution)임을 밝혔다. 본 연구에서는 기초자산이 로그정규분포를 따르는 경우를 기준으로 기초자산이 추계적 변동성 모형을 따르는 경우와 점프 모형 (Jump Diffusion Model)을 따르는 경우를 함께 비교한다.

2.1. 기호

먼저 본 장에서 사용되는 여러 가지 기호를 정의한다.

t	= 현재시점
t^*	= 옵션의 만기
T	= 옵션의 만기까지의 기간 (= $t^* - t$)
Δt	= 재조정기간
S	= t 시점에서 기초자산(주식)의 가격
ΔS	= t 시점부터 $t + \Delta t$ 시점에서 기초자산의 가격의 변화량
X	= 옵션의 행사가격
r	= 연속복리 무위험 이자율 (t 시점부터 옵션의 만기까지 일정하다고 가정)
V	= 기초자산 수익률의 분산
C	= t 시점에서 콜옵션의 가격
ΔC	= t 시점부터 $t + \Delta t$ 시점에서 옵션가격의 변화량
d_1	= $[\log(S/X) + (r + V/2)T] / [VT]^{0.5}$
d_2	= $d_1 - [VT]^{0.5}$
$n(\cdot)$	= 표준정규분포의 확률밀도함수
$N(\cdot)$	= 표준정규분포의 누적분포함수

2.2. 기초자산이 로그정규분포를 따르는 경우

Black-Scholes (1973) 모형은 다음의 네 가지 가정에 기초한다. 첫째, 기초자산 가격은 로그정규분포를 따르고, 둘째, 이자율이 옵션의 만기까지 일정하고, 셋째, 거래비용은 존재하지 않으며, 마지막으로 기초자산을 연속적으로 거래할 수 있다고 가정한다. 이러한 가정 하에서 유럽식 콜옵션은 다음과 같은 편미분 방정식을 만족시킨다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} VS^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC = 0 \quad (1)$$

콜옵션의 만기 수익을 경계조건으로 사용하여 위의 편미분 방정식의 해를 계산하면 콜옵션의 가격은 다음과 같다.

$$C = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \quad (2)$$

t 시점에서 콜옵션의 헤지 포트폴리오는 콜옵션 한 계약의 매도포지션과 기초자산 $\partial C/\partial S$ 주주의 매수포지션으로 구성된다. Black-Scholes 모형에서 $\partial C/\partial S = N(d_1)$ 이므로 t 시점의 헤지 포트폴리오의 가치는 $-C + SN(d_1)$ 이며, 이 금액은 헤지 포트폴리오 투자자의 기초 투자금액과 같다. $t+\Delta t$ 시점에서의 헤지 포트폴리오의 가치는 $-(C + \Delta C) + (S + \Delta S)N(d_1)$ 이므로, Δt 동안 헤지 포트폴리오의 수익률, HR 은 다음과 같다.

$$HR = \frac{-\Delta C + \Delta SN(d_1) - r\Delta t(-C + SN(d_1))}{-C + SN(d_1)} \quad (3)$$

한편, Δt 동안의 옵션가격의 변화, ΔC 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Delta C = \frac{\partial C}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial C}{\partial S} \Delta S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} VS^2 u^2 \Delta t \quad (4)$$

이 때, u 는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다. 식 (3)에 식 (4)와 식(2)의 옵션 가격, 그리고 식 (1)의 $\partial C/\partial t$ 를 대입하면 HR 은 다음과 같이 표현된다.

$$HR = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{V}{T}} \frac{n(d_2)}{N(d_2)} (1 - u^2) \Delta t \quad (5)$$

비슷한 방법으로 풋옵션의 헤지 포트폴리오 수익률은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$HR = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{V}{T}} \frac{n(-d_2)}{N(-d_2)} (1 - u^2) \Delta t$$

식 (5)로부터 기초자산일 로그정규분포를 따르는 경우 헤지 포트폴리오 수익률의 특징을 세 가지로 요약할 수 있다. 첫째, 헤지 포트폴리오 수익률의 평균은 0 이다. u^2 는 자유도가 1인 카이제곱 분포를 따르므로 평균이 1이고, 따라서 헤지 포트폴리오의 수익률의 평균은 0 이다. 둘째, 콜옵션 (풋옵션)의 헤지 포트폴리오 수익률의 분산은 행사가격이 증가할수록 (감소할수록) 증가한다. 콜옵션의 경우 행사가격에 대한 효과는 $n(d_2)/N(d_2)$ 에 의하여 결정된다. $n(d_2)/N(d_2) = \partial \log(N(d_2))/\partial d_2$ 이고, $\log(\cdot)$ 와 $N(\cdot)$ 모두 단조증가함수이므로 d_2 가 증가하면 $n(d_2)/N(d_2)$ 도 증가한다. 또한 $\partial d_2/\partial K = -1/(K\sqrt{VT})$ 이므로, 결과적으로 행사가격이 증가하면 $n(d_2)/N(d_2)$ 가 증가하고, 결과적으로 헤지 포트폴리오의 분산이 증가한다. 동일한 분석에 의하여 풋옵션의 경우에는 행사가격이 감소하면 헤지 포트폴리오의 분산이 증가하며, 이를 종합하면 헤지 포트폴리오의 분산은 내가격 옵션보다 외가격 옵션이 크다고 요약할 수 있다. 셋째, 헤지 포트폴리오 수익률의 왜도는 음의 값을 나타내며, 그 크기는 행사가격에 관계없이 일정하다. 왜도는 일반적으로 정의하듯이 표준편차로 표준화 3차 중앙 모멘트¹⁾를 사용하였다. 표준화하지 않는 왜도는 분산과 마찬가지로 내가격에서 외가격으로 갈수록 증가한다. 콜옵션 헤지 포트폴리오 수익률의 평균, 분산, 왜도를 계산하면 다음의 식 (6)과 같이 계산되며, 풋옵션의 경우에도 비슷한 결과를 도출할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Mean}(HR) &= 0 \\ \text{Var}(HR) &= \frac{1}{2} \frac{V}{T} \left(\frac{n(d_2)}{N(d_2)} \right)^2 \Delta t^2 \\ \text{Skewness}(HR) &= -\sqrt{8} \end{aligned} \quad (6)$$

식 (5)는 Δt 가 매우 작은 경우, 한 기간 동안의 헤지 포트폴리오의 수익률의 분

1) 확률변수 X의 평균이 μ , 표준편차가 σ 일 때, 왜도는 다음과 같다.

$$\text{Skewness} = \frac{E[X - \mu]^3}{\sigma^3}$$

포를 나타낸다. 헤지 포트폴리오를 여러 차례 재조정하는 경우 헤지 포트폴리오의 수익률의 분포는 식 (6)의 결과와 다소 다르다. 이를 살펴보기 위하여 옵션의 만기까지 일별로 재조정되는 헤지 포트폴리오의 수익률을 다음과 같이 정의하고, 시물레이션 분포를 살펴보았다.

$$HR = \frac{C_0 e^{rT} - \max(S_T - X, 0) + \sum_{t=0}^{T-1} D_t (S_{t+1} - S_t) e^{r(T-t)}}{D_0 S_0 - C_0} \quad (7)$$

이 때, D_t 는 t 시점에서 계산한 헤지 계수, 즉, $N(d_1)$ 이다. 식 (7)의 분자는 옵션 포지션에 대한 수익과 일별로 재조정되는 기초자산의 포지션에 대한 수익의 두 부분으로 구성되어 있으며, 분모는 기초투자금액이다. 풋옵션에 대한 헤지 포트폴리오의 수익률도 유사한 방법으로 계산할 수 있다. 식 (7)을 10,000번 시물레이션 한 뒤 평균, 표준편차, 왜도를 계산하여 그림 1의 (a)에 각각 원표식, 별표식, 그리고 사각형표식으로 나타내었다. 사용된 모수는 $S = 100$, $X = 80 \sim 120$, $r = 0.05$, $T = 0.25$, $V = 0.04$, $\Delta t = 10$ 일이다. 그림 1의 (a)로부터 HR 의 평균은 행사가격과 관계없이 0이고, 표준편차는 내가격에서 외가격으로 갈수록 증가하여 식 (6)과 유사한 결과를 확인할 수 있다. 그림 1의 (b)에는 풋옵션에 대한 HR 의 평균, 표준편차, 왜도를 나타내었는데, 그 결과는 콜옵션의 HR 과 동일하게 평균은 0이고, 표준편차는 내가격에서 외가격으로 갈수록 증가한다. 그러나 왜도의 경우는 콜옵션과 풋옵션 모두 낮은 행사가격에서는 음의 값을 나타내고, 높은 행사가격에서는 양의 값을 나타내어 식 (6)의 결과와는 다르다.

Black-Scholes의 가정 하에서는 헤지 포트폴리오를 연속적으로 재조정할 수 있으므로²⁾ 분산과 왜도가 모두 0으로 수렴하고 헤지 포트폴리오의 수익률은 축퇴분포 (Degenerated Distribution)를 이룬다. 옵션이 기초자산으로 완벽하게 복제가 가능한 경우 옵션가격은 식 (2)의 Black-Scholes 모형의 가격과 일치한다. 그러나 현실에서는 헤지 포트폴리오를 연속적으로 재조정할 수 없기 때문에 헤지 포트폴리오 투자자는 헤지 오차에 대한 위험을 감수해야 한다. Kraus, Lizenberger (1976)에 의하면 합리적인 투자자의 효용함수는 첫째, 부 (Wealth)에 대한 한계효용이 양수이고, 둘째, 한계 효용이 체감하며, 셋째, 절대 위험회피도가 증가하지 않아야 한다. 한계 효용이 체감한다는 것은 분산에 대한 위험회피성향을 나타내며, 절대 위험회피도가 증가하지 않는다는 것은 양의 왜도에 대한 선호를 나타낸다. 이와 같은 조건을 만족하는 효용함수를 갖는 헤지 포트폴리오 투자자는 헤지 포트폴리오의 수익률의 양의 분산 및 음의 왜도에 대한 프리미엄을 요구할 수 있으며, 헤지 오차에 대한 위험 프리미엄은 옵션가격에 반영될 수 있다.

2) 즉, Δt 가 0에 가까워짐에 따라

2.3. 기초자산이 추계적 변동성 과정을 따르는 경우

추계적 변동성 모형은 Heston (1993)에서와 같이 기초자산과 기초자산의 분산이 다음과 같은 추계적 과정을 따른다고 가정한다.

$$\begin{aligned} dS &= \mu S dt + \sqrt{V} S dZ_1 \\ dV &= \kappa(\theta - V)dt + \sigma\sqrt{V}dZ_2 \\ dZ_1 dZ_2 &= \rho dt \end{aligned} \tag{8}$$

이 때, dZ_1 과 dZ_2 는 순간상관계수가 ρ 인 위너 과정(Wiener Process)이며, μ 는 기초자산의 평균수익률 (Drift)이다. 기초자산의 분산 V 는 Cox, Ingersoll, Ross (1985)에서와 같이 장기평균이 θ , 평균회귀속도가 κ , (분산의) 변동성이 σ 인 평균회귀과정 (Mean-reverting Process)을 따른다. 분산이 시장에서 거래되지 않는 경우 추계적 변동성 모형의 콜옵션은 다음과 같은 편미분 방정식을 따른다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} VS^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{1}{2} V\sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial V^2} \\ + (\kappa(\theta - V) + \lambda(S, V, t)\sigma\sqrt{V}) \frac{\partial C}{\partial V} + \rho\sigma SV \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial V} - rC = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

이 때, $\lambda(S, V, t)$ 는 변동성 위험의 시장가격 (Market Price of Volatility Risk)이다. Heston (1993)은 $\lambda(S, V, t) = \lambda\sqrt{V}$ 로 가정하고 푸리에 변환을 이용하여 다음과 같은 콜옵션의 폐쇄해를 도출하였다.

$$\begin{aligned}
C &= Se^{-qT} P_1 - Ke^{-rT} P_2 \\
P_j(x, V, T, K) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\varphi \log(K)} f_j(x, V, T, \varphi)}{i\varphi} \right) d\varphi \\
f_j(x, V, T, \varphi) &= \exp[C(T, \varphi) + D(T, \varphi)V + i\varphi x] \\
C(T, \varphi) &= r\varphi ir + \frac{a}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho\sigma\varphi i + d)T - 2 \log \left(\frac{1 - ge^{dr}}{1 - g} \right) \right] \\
D(T, \varphi) &= \frac{b_j - \rho\sigma\varphi i + d}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{dr}}{1 - ge^{dr}} \right) \\
g &= \frac{b_j - \rho\sigma\varphi i + d}{b_j - \rho\sigma\varphi i - d} \\
d &= \sqrt{(\rho\sigma\varphi i - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j\varphi i - \varphi^2)} \\
x = \log(S), u_1 &= \frac{1}{2}, u_2 = -\frac{1}{2}, a = \kappa\theta, b_1 = \kappa + \lambda - \rho\theta, b_2 = \kappa + \lambda
\end{aligned} \tag{10}$$

식 (10)으로부터 헤지 포트폴리오 내의 기초자산에 대한 포지션은 $\partial C/\partial S = P_1$ 이다. 한편, Δt 동안의 옵션가격의 변화 ΔC 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned}
\Delta C &= \frac{\partial C}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial C}{\partial S} \Delta S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} VS^2 z_1^2 \Delta t \\
&+ \frac{\partial C}{\partial V} \Delta V + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial V^2} V\sigma^2 z_2^2 \Delta t + \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial V} \sigma SV z_1 z_2 \Delta t
\end{aligned} \tag{11}$$

이 때, z_1 과 z_2 는 이변량 표준정규분포를 따르는 확률변수이며 상관계수는 ρ 이다. 식 (9)과 식 (11)을 이용하여 헤지 포트폴리오의 수익률을 계산하면 다음과 같다.

$$HR = \frac{\left[\frac{1}{2} VS^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} (1 - z_1^2) \Delta t + \frac{1}{2} V\sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial V^2} (1 - z_2^2) \Delta t + \sigma VS \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial V} (\rho - z_1 z_2) \Delta t \right.}{-C + S \frac{\partial C}{\partial S}} \left. - \sigma \sqrt{V} \frac{\partial C}{\partial V} z_2 \sqrt{\Delta t} + \sigma \sqrt{V} \frac{\partial C}{\partial V} \lambda(S, V, t) \Delta t \right] \tag{12}$$

식 (12)에서 $E(z_2) = 0$, $E(z_1^2) = 1$, $E(z_2^2) = 1$, $E(z_1 z_2) = \rho$ 이므로 헤지 포트폴리오 수익률의 기대값은 $\left(\sigma \sqrt{V} \frac{\partial C}{\partial V} \lambda(S, V, t) \Delta t \right) / \left(-C + S \frac{\partial C}{\partial S} \right)$ 이다. Bakshi, Kapadia

(2003)에 따르면 $\lambda(S, V, t)$ 는 음의 값을 갖는다고 보고하였다. 이러한 경우 헤지 포트폴리오 수익률의 기대값은 음의 값으로 예상할 수 있다. 식 (12)를 이용하여 계산한 HR 의 분산과 왜도는 그 결과가 식 (6)의 결과와 유사하다. 이는 분산과 왜도에 가장 큰 영향을 미치는 항이 식 (5)에서와 마찬가지로 기초자산에 대한 감마 (Gamma)와 관련된 HR 의 분자의 첫 번째 항이기 때문이다. 식 (12)의 분자의 다른 항들도 내가격에서 외가격으로 갈수록 분산의 크기가 증가하지만, 절대적인 크기는 첫 번째 항에 비교하여 미미하다.

한편, 추계적 변동성 모형을 이용하여 옵션의 만기까지 일별로 재조정되는 헤지 포트폴리오의 수익률에 대한 시뮬레이션 결과를 그림 1의 (c)와 (d)에 나타내었다. 헤지 포트폴리오의 수익률은 식 (7)을 이용하였으며, 사용된 모수는 $S = 100$, $X = 80 \sim 120$, $r = 0.05$, $T = 0.25$, $\Delta t = 10$ 일, $\kappa = 2$, $\Theta = 0.04$, $\sigma = 0.1$. $\rho = -0.5$, $V = 0.04$, $\lambda = 0$ 이다. 그림 1의 (c)로부터 추계적 변동성 모형을 사용하는 경우에도 콜 옵션에 대한 HR 의 평균은 0에 가깝고, 표준편차는 그림 1의 (a)의 경우와 유사하게 내가격에서 외가격으로 갈수록 그 크기가 증가함을 알 수 있다. HR 의 왜도 또한 그림 1의 (a)의 경우와 동일하게 낮은 행사가격에서는 음의 값을 나타내고, 높은 행사가격에서는 양의 값을 나타내며 단조증가한다. 그림 1의 (d)에서 풋옵션에 대한 HR 의 평균, 표준편차, 왜도 또한 Black-Scholes 모형을 이용한 그림 1의 (b)의 결과와 유사한 모습을 관찰할 수 있다.

2.4. 기초자산이 점프 과정을 따르는 경우

기초자산 가격이 점프 (Jump Diffusion)과정을 따르는 경우의 옵션평가모형은 Merton (1976), Ball, Torous (1983, 1985), Amin (1993), Bates (1991) 등에 의하여 개발되었다. Merton이 분산가능하고 (Diversifiable) 개별적 (Idiosyncratic) 점프 모형을 주장한 반면, Bates는 비대칭적이고 (Asymmetric) 체계적 (Systemic) 점프 위험을 고려한 옵션평가모형을 유도하였다. 본 연구에서는 기초자산이 다음과 같은 추계적 과정을 따르는 Bates의 모형을 이용한다.

$$dS = (\mu - \lambda \bar{k}) S dt + \sqrt{V} S dZ + kdq \quad (13)$$

이 때, λ 는 점프의 빈도를 나타내고, q 는 평균이 λ 인 포아송 (Poisson) 확률변수이며, k 는 점프가 발생한 경우 점프의 크기를 나타내는 확률변수이다. $(1+k)$ 는 로그 정규분포를 따르며 \bar{k} 는 점프의 평균크기이고, δ 는 $\log(1+k)$ 의 표준편차이다. 기초자산이 식 (13)을 따르는 경우 유럽식 콜옵션과 풋옵션의 가격은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
c &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda T} (\lambda T)^i}{i!} c_i(S, X, b_i, T, V_i) \\
p &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda T} (\lambda T)^i}{i!} p_i(S, X, b_i, T, V_i) \\
b_i &= r - \lambda \bar{k} + \frac{i \log(1 + \bar{k})}{T} \\
V_i &= V^2 + \delta^2 \frac{i}{T}
\end{aligned} \tag{14}$$

이 때, $c_i(S, X, b_i, T, V_i)$ 와 $p_i(S, X, b_i, T, V_i)$ 는 기초자산 가격이 S , 행사가격이 X , 보유 비용(Cost of Carry)이 b_i , 만기가 T , 기초자산의 분산이 V_i 인 경우 Black-Scholes 모형으로 계산한 콜옵션과 풋옵션 가격이다.

점프 모형을 이용하여 옵션의 만기까지 일별로 재조정되는 헤지 포트폴리오의 수익률에 대한 시뮬레이션 결과를 그림 1의 (e)와 (f)에 나타내었다. 헤지 포트폴리오의 수익률은 식 (7)을 이용하였으며, 사용된 모수는 $S = 100$, $X = 80 \sim 120$, $r = 0.05$, $T = 0.25$, $\Delta t = 10$ 일, $\bar{k} = -0.05$, $\delta = 0.05$, $\lambda = 4$ 이다. 그림 1의 (e)로부터 기초자산이 점프 과정을 따르는 경우에도 그림 1의 (a)의 경우와 유사하게 콜옵션에 대한 HR 의 평균은 0에 가깝고, 표준편차는 내가격에서 외가격으로 갈수록 그 크기가 증가함하며, 왜도는 낮은 행사가격에서는 음의 값을 나타내고, 높은 행사가격에서는 양의 값을 나타내며 단조증가함을 관찰할 수 있다. 그림 1의 (f)에서 풋옵션에 대한 HR 의 평균, 표준편차, 왜도 또한 Black-Scholes 모형을 이용한 그림 1의 (b)의 결과와 유사하다.

3. 헤지 포트폴리오의 수익률 분포

3.1. 자료

본 연구에서는 미국 S&P 500 지수옵션을 이용하여 실증분석을 실시하였다. S&P 500 지수옵션은 유럽식 옵션이며 IVY DB OptionMetrics Version 2.5.1 로부터 1996년 1월부터 2007년 6월까지 총 138월의 자료를 이용하였다. 연속복리 무위험 이자율과 S&P 500 지수의 배당률도 모두 OptionMetrics가 함께 제공하는 자료를 이용하였다.

실증분석을 위하여 다음과 같은 조건을 만족시키지 않는 옵션은 제외하였다. 첫째, 옵션의 가격이 내재가치보다 작은 옵션은 제외하였다. 이와 같은 옵션들은 무차익거래조건을 만족시키지 않는다. 둘째, 옵션의 델타의 절대값이 0.02보다 작거나 0.98보다 큰 옵션들은 제외하였다. 델타의 절대값이 0.02보다 작거나 0.98보다 큰 옵션들은 호가스프레드와 최소호가단위에 의한 문제가 발생할 수 있다. 셋째, 만기가 6일 미만인 옵션은 제외하였다. 만기가 지나치게 짧은 경우, 시장미시구조적인 문제에 의하여 정상적인 가격발견기능이 작동되지 않을 수도 있다. 마지막으로, Bakshi, Cao, Chen (1997)과 같이 옵션가격이 \$3/8 미만인 옵션은 제외하였다. 가격이 낮은 옵션들도 앞서 기술한 바와 같은 호가스프레드와 최소호가단위에 의한 문제가 발생할 수 있다. 이와 같은 조건을 만족시키는 옵션의 개수는 총 9,460개로 한 만기일당 68.6 (= 9,460/138)개의 옵션이 선택되었다.

헤지 포트폴리오의 수익률의 분포적 특성을 행사가격 별로 비교하기 위하여 표 1에 가격도 그룹 (Moneyness Group)을 정의하였다. 가격도 및 가격도 그룹은 Bollen, haley (2004)와 동일하게 옵션의 델타로 정의하였다. 가격도를 행사가격과 기초자산의 가격의 비율로 정의하는 것보다 옵션을 델타로 정의하는 것이 옵션이 행사될 가능성을 보다 정확하게 나타낼 수 있다. 옵션의 델타는 기본적으로 과거 60일 동안의 S&P 지수수익률을 이용하여 계산된 실현 변동성 (Realized Volatility)과 Black-Scholes 모형을 이용하여 계산하였으나, 변동성 추정치 및 옵션평가모형에 따라서 다르게 계산될 수 있다. 이에 대해서는 뒤에 다시 언급한다. 표 1에서 가격도 그룹은 콜옵션과 풋옵션에 대하여 각각의 옵션의 델타에 따라 DOTM (Deep Out-of-the-money), OTM (Out-of-the-money), ATM (At-the-money), ITM (In-the-money), DITM (Deep In-the-money)의 다섯 개로 분류하였다. 가격도의 절대값이 0.02보다 작거나 0.98보다 큰 옵션은 제외되었다.

표 2에 헤지 포트폴리오의 수익률을 계산하기 위하여 선택된 옵션들에 대하여 평균 내재변동성 (Implied Volatility; IV) 및 내재변동성과 실현변동성 (Realized Volatility; RV)의 차이의 평균을 나타내었다. 만기별, 가격도 그룹별 관측치수, 거래량 합계, 그리고 평균 델타도 함께 나타내었다. 전반적으로 콜옵션의 관측치가 풋옵

선의 관측치보다 다소 많으며, 만기가 길어질수록 옵션의 관측치가 작아진다. 3개월 이후에 만기가 도래하는 옵션의 경우 관측치가 매우 작기 때문에 제외하였다. 거래량을 살펴보면 콜옵션의 경우 가격도 그룹 3 또는 4의 거래량이 가장 활발하며, 풋옵션의 경우에는 가격도 그룹 2의 옵션의 거래량이 가장 많다. 이러한 결과는 Bollen, Whaley (2004)의 결과와 일치한다.

내재변동성을 살펴보면, 콜옵션의 가격도별 내재변동성은 행사가격이 증가함에 따라 감소하는 형태로 Dumas, Fleming, Whaley (1998) 등의 기존연구에서와 일치하는 결과를 보여준다. 반면 풋옵션의 내재변동성 함수는 역시 비대칭적이긴 하지만 가격도 그룹 4 (ITM Put)의 옵션에서 최소값을 갖고, 가격도 그룹 5 (DITM Put)의 옵션은 오히려 상승하는 형태를 나타내고 있다. 만약 콜옵션과 풋옵션의 내재변동성 함수를 평균치를 계산하면 가격도 그룹 5에 속하는 콜옵션의 관측치가 풋옵션의 관측치보다 훨씬 많이 때문에 (각각 718과 272), 기존 연구에서 보고된 바와 비슷한 결과가 나타날 수 있다. 그룹 5에 속하는 콜옵션과 풋옵션의 내재변동성의 차이는 풋옵션의 넓은 호가 스프레드 때문에 풋-콜 패리티 (Put-call Parity)에 의한 차익거래 기회가 발생하지는 않지만, 기존의 무차익거래 모형에서는 설명할 수 없는 현상이다. 이상의 내용을 그림 2의 상단에서 확인할 수 있다.

내재변동성과 실현변동성의 차이는 가격도 그룹별 옵션의 저평가, 고평가 정도를 나타낸다. 표 2와 그림 2의 하단으로부터 가격도 그룹 1에 해당되는 옵션, 즉 DITM 콜옵션과 DOTM 풋옵션이 상대적으로 고평가되어 있음을 알 수 있다. 가격도 그룹 4에 해당하는 옵션들의 내재변동성은 평균적으로 실현변동성과 거의 동일한 수치를 나타내었다. 가격도 그룹 5에 해당되는 옵션들은 콜옵션과 풋옵션의 결과가 서로 상이한데, 풋옵션의 경우 내재변동성이 실현변동성보다 높게 나타났으며, 콜옵션의 경우 실현변동성과 유사한 수치를 나타내었다. 이러한 결과는 풋옵션의 내재변동성 함수의 형태와 일치하는 결과이다.

3.2. 헤지 포트폴리오 구성방법 및 수익률 계산

실증분석을 실시하기 위하여 먼저 헤지 포트폴리오의 수익률을 1개월 단위로 계산하였다. 1개월 헤지 포트폴리오의 수익률을 계산하기 위하여 옵션 만기일 시점에서 정확히 1개월 뒤에 만기가 도래하는 콜옵션과 풋옵션들을 선택한다. S&P 500 지수옵션의 경우 매월 세 번째 금요일에 만기가 도래하므로³⁾ 만기까지의 기간은 28일 또는 35일이 된다. 선택된 각각의 옵션에 대하여 한 계약의 옵션을 매도하고, 델타만큼의 기초자산을 편입한 헤지 포트폴리오를 구성한다. 각각의 옵션은 최우선 매도호가와 최우선 매수호가의 평균값으로 매도하였다고 가정하며, 1개월 뒤의 만

3) S&P 지수옵션의 만기는 매월 세 번째 금요일 종가로 만기수익이 결정되며, 익일 오전에 결제된다. 편의상 금요일 오후를 만기로 간주한다.

기 시점까지 매일 시장 종료시점에서 기초자산의 편입수량을 조정함으로써 헤지 포트폴리오를 재조정한다. 만기가 도래하면 각각의 헤지 포트폴리오에 대하여 만기수익을 차감하고 기초자산은 반대포지션을 취하여 헤지 포트폴리오를 마감한다. 이와 같은 전략에 의하여 콜옵션에 대한 헤지 포트폴리오의 수익률을 계산하면 다음 식과 같이 계산한다.

$$HR = \frac{(c_0 e^{rT} - \max(S_T - K, 0)) + \sum_{t=0}^{T-1} D_t (S_{t+1} e^{r\Delta t} - S_t) e^{r(T-t)}}{D_0 S_0 - c_0} \quad (15)$$

이 때, 아래첨자는 시점을 나타낸다. 식 (14)의 분자는 옵션 포지션에 대한 수익과 일별로 재조정되는 기초자산의 포지션에 대한 수익의 두 부분으로 구성되어 있으며, 분모는 기초투자금액이다. 풋옵션에 대한 헤지 포트폴리오의 수익률도 유사한 방법으로 계산할 수 있다. 1개월 단위로 헤지 포트폴리오의 수익률을 계산하는 방법은 두 가지 이점이 있다. 첫째, 기존의 다른 연구에서 1일 헤지 성과를 비교했던 것과 달리, 옵션 포지션을 만기까지 보유함으로써 모형위험을 반영할 수 있다. 만약 특정 모형이 옵션가격을 지속적으로 과소평가하는 경향이 있는 경우, 1일 헤지 성과에서는 모형의 과소평가 경향이 제대로 반영되지 않을 수 있다. 그러나 어떠한 모형이든 만기 시점에서는 동일한 가격으로 수렴하기 때문에 만기까지의 헤지 성과를 비교하면 모형위험에 의한 오류를 반영할 수 있다. 둘째, 각각의 옵션자료를 한 번씩만 사용하여 중복 관측치 (Overlapping Observation) 문제를 제거하였다. 중복 관측치를 사용하는 경우 통계적 유의성에 관한 복잡한 문제들이 발생할 수 있다. 동일한 방법으로 2개월 단위와 3개월 단위의 헤지 포트폴리오의 수익률을 계산함으로써 만기변화에 따른 헤지 포트폴리오 수익률 분포의 변화를 비교하였다.

3.3. 헤지 포트폴리오 수익률 분석

헤지 포트폴리오는 최우선 매도호가와 최우선 매수호가의 평균값에 옵션을 매도하고, 매일 시장 종료시점에서 헤지 포트폴리오를 재조정하며, 거래비용은 없는 것으로 가정한다. 헤지 계수 및 모수 추정방법은 전략 별로 다음과 같다.

전략 1: Black, Scholes (1973) 모형으로 계산된 기초자산의 델타 ($N(d_1)$)를 헤지 계수로 사용하고 변동성은 과거 60일 동안의 기초자산 수익률로 계산한 실현변동성을 사용한다.

전략 2: Black, Scholes (1973) 모형으로 계산된 기초자산의 델타 ($N(d_1)$)를 헤지 계수로 사용하고 변동성은 내재변동성을 사용한다.

전략 3: Heston (1993) 모형으로 계산된 기초자산의 델타 (식 (10))를 헤지 계수로 사용하고 옵션가격으로부터 추정된 모수들을 사용한다.

전략 4: Bates (1991) 모형에 의하여 계산된 기초자산의 델타 (식 (14))를 사용하고, 옵션가격으로부터 추정된 모수들을 사용한다.

헤지 계수의 계산에 사용되는 모수는 옵션이 매도되는 시점에서 추정하며, 이후 헤지 포트폴리오의 재조정 시점에서는 동일한 모수를 이용하여 헤지 계수를 계산한다. 전략 1에서 실현변동성은 앞서 설명한 바와 같이 과거 60일 동안 기초자산 수익률로부터 계산하며, 전략 2에서 내재변동성은 모수 추정시점에서 존재하는 옵션들의 내재변동성을 단순 평균하여 사용하였다. 전략 3의 Heston (1993) 모형에서 사용되는 모수는 옵션가격으로부터 추정한다. 옵션가격으로부터 모형의 모수를 추정하는 것은 본 연구의 전체적인 맥락과 일치하지 않는다. 옵션가격에는 헤지 오차에 대한 투자자들의 위험회피성향이 반영되어 있을 수 있으므로, 이로부터 무차익 거래모형의 모수들을 추정하는 것은 바람직하지 않다. 그러나 기초자산의 변동성은 시장에서 거래가 되지 않는 자산이기 때문에 변동성 위험의 시장가격은 관측되지 않으며 기초자산에 대한 정보만으로는 Heston 모형의 모수들을 추정할 수 없다. 본 연구에서는 옵션가격을 이용하여 추정한 모수들을 대용치 (Proxy)로 간주하여 헤지 계수를 계산한다. 전략 4의 Bates (1991) 모형에서 사용하는 모수도 옵션가격으로부터 추정한 모수를 사용한다.

옵션가격으로부터 Heston (1993) 모형의 모수를 추정하기 위하여 Bakshi, Cao, Chen (1997) 은 콜옵션 가격에 대하여 다음의 식과 같이 시장가격과 모형가격의 오차의 제곱의 합 (Sum of Squared Errors; SSE)을 최소화하는 방법을 사용하였다.

$$SSE(\kappa, \theta, \sigma, \rho, V_0) = \sum_{i=1}^N \left(c_i^{Market} - c_i(\kappa, \theta, \sigma, \rho, V) \right)^2 \quad (16)$$

이 때, c_i^{Market} 은 옵션의 시장가격이며, $c_i(\kappa, \theta, \sigma, \rho, V)$ 은 모수에 의하여 결정되는 옵션의 이론가격, 그리고 N은 모수 추정시점에서 시장에 존재하는 옵션의 개수이다. 이와 같은 방법은 가격이 낮은 옵션보다 가격이 높은 옵션, 즉, 내가격 옵션에 더 높은 가중치를 부여하고 모수를 추정하는 것이다. 이와는 달리 본 연구에서는 콜옵션과 풋옵션 모두에 대하여 시장가격의 내재변동성과 이론가격의 내재변동성의 오차의 제곱의 합을 최소화하는 방법을 사용하였다.

$$SSE(\kappa, \theta, \sigma, \rho, V_0) = \sum_{i=1}^N \left(IV_i^{Market} - IV_i(\kappa, \theta, \sigma, \rho, V) \right)^2 \quad (17)$$

이 때, IV_i^{Market} 은 옵션의 시장가격으로부터 계산된 내재변동성이며, $IV_i(\kappa, \theta, \sigma, \rho, V)$ 은 옵션의 이론가격으로부터 계산된 내재변동성이다. 이와 같은 방법을 사용하는 까닭은 모든 옵션에 동일한 가중치를 부여하기 위함이다.

표 3에 헤지 계수에 사용된 모수 추정결과를 나타내었다. 먼저 Panel A에서 Black-Scholes 모형에 사용되는 실현변동성과 내재변동성을 비교해보면 평균이 각각 16.32%와 24.24%로 내재변동성이 실현변동성보다 약 8% 높게 나타난다. 만약 Black-Scholes 모형이 맞다면 옵션은 평균적으로 고평가되어 있다고 주장할 수 있다. Panel B에서 Heston (1993) 모형의 모수 추정결과는 Bakshi, Cao, Chen (1997)의 결과와 부분적으로 다른 모습을 보이고 있다. 특히 κ 와 σ 는 각각 15.87과 1.06으로 Bakshi, Cao, Chen의 결과보다 매우 높은 수치를 나타내고 있다. 이러한 차이는 표본기간과 모수추정에 사용된 목적함수의 차이에 의한 것으로 추측할 수 있다. Bakshi, Cao, Chen이 콜옵션 자료에 대하여 가격오차를 최소화하는 방법을 이용한 반면, 본 연구에서는 콜옵션과 풋옵션을 모두에 대하여 내재변동성을 최소화하는 방법으로 모수를 추정하였다. 그림 1의 결과를 상기해보면 풋옵션의 내재변동성 함수는 콜옵션의 내재변동성 함수와 달리 가격도 그룹 5의 내재변동성이 높게 형성되어 있다. 이 경우 옵션가격에 내재된 침도가 높게 나타나며 이와 관계되는 κ 와 σ 의 크기가 높게 추정될 수 있다. 반면 옵션가격에 내재된 왜도와 관계되는 ρ 는 -0.68로 Bakshi, Cao, Chen의 결과 (-0.64)와 유사한 결과가 나타났으며, θ 의 경우에도 0.05로 비슷한 추정치가 관찰되었다.

그림 3은 1개월 만기 옵션에 대하여 전략 1에 의한 헤지 포트폴리오 수익률의 분포에 대한 히스토그램이다. 먼저 DITM 옵션에 대한 헤지 포트폴리오 수익률의 경우 콜옵션과 풋옵션 모두 0에서 축퇴 (Degenerate)하는 형태를 나타내고 있으며, 전반적으로 내가격에서 외가격으로 갈수록 헤지 포트폴리오 수익률의 분산은 증가하는 양상을 관찰할 수 있다. DOTM 옵션의 경우 콜옵션과 풋옵션에 대한 헤지 포트폴리오 수익률의 분포가 다소 다르다. DOTM 풋옵션에 대한 헤지 포트폴리오 수익률의 경우 왼쪽으로 치우친 형태의 분포가 관찰되는 반면, DOTM 콜옵션에 대한 헤지 포트폴리오 수익률의 경우 오히려 약간 오른쪽으로 치우친 형태의 분포가 관찰된다. 즉, DOTM 풋옵션의 경우에는 음의 왜도를 나타내는 반면, DOTM 콜옵션의 경우에는 다소 양의 왜도를 나타낸다. 이상의 결과는 2장에서 살펴본 시뮬레이션 분포와 일치하는 결과이다.

보다 정확한 결과를 살펴보기 위하여 표 4에 헤지 포트폴리오의 수익률을 전략별, 만기별, 가격도 그룹별로 나타내었다. 먼저 Panel A에서는 실현변동성과 Black, Scholes (1973) 모형을 이용 (전략 1) 하여 일별로 재조정된 헤지 포트폴리오의 수익률의 분포를 나타내었다. 전반적인 분포의 특징을 세 가지로 요약할 수 있다. 첫째, 내가격에서 외가격으로 갈수록 헤지 포트폴리오의 평균 수익률과 표준편차가

모두 증가한다. 1개월 만기 풋옵션에 대한 헤지 포트폴리오 수익률의 평균은 가격도 그룹 5의 0.31%에서 가격도 1의 4.49%로 증가하며 이와 함께 수익률의 표준편차도 0.23%에서 5.93%로 증가한다. 콜옵션의 경우에도 내가격에서 외가격으로 갈수록 평균과 표준편차가 증가하는 양상을 보여주지만, 풋옵션의 경우보다 그 정도가 강하게 관찰되지 않는다. 예를 들어 1개월 만기 콜옵션에 대한 헤지 포트폴리오 수익률의 평균은 가격도 그룹 1의 0.11%에서 가격도 그룹 5의 0.79%로 증가하며, 수익률의 표준편차는 0.39%에서 2.52%로 증가한다. 또한 풋옵션의 경우에는 평균과 표준편차의 증가 양상이 단조적인 반면, 콜옵션의 경우에는 부분적으로 감소하는 양상 (가격도 그룹 4)도 나타내고 있다. 즉, 풋옵션의 경우 평균-표준편차 사이의 교환관계 (Trade-off)가 강하게 발견되는 반면, 콜옵션의 경우에는 그 관계가 풋옵션의 경우만큼 강하게 관찰되지 않는다.

둘째, 옵션의 만기가 증가함에 따라 헤지 포트폴리오 수익률의 표준편차가 증가한다. 예를 들어 1개월 만기의 풋옵션에 대한 헤지 포트폴리오 수익률의 표준편차는 가격도 그룹 1부터 가격도 그룹 5까지 각각 5.93%, 1.97%, 0.88%, 0.57%, 0.23%이고, 2개월 만기 풋옵션의 경우는 가격도 그룹 1부터 가격도 그룹 5까지 각각 7.88%, 2.79%, 1.24%, 0.67%, 0.33%이다. 콜옵션의 경우에도 1개월 만기 헤지 포트폴리오 수익률의 표준편차는 가격도 그룹 1부터 가격도 그룹 5까지 0.39%, 0.65%, 0.98%, 1.92%, 2.52%이고, 2개월 만기의 경우 0.60%, 1.01%, 1.41%, 2.38%, 5.34%이다.

셋째, 풋옵션의 헤지 포트폴리오 수익률의 왜도는 내가격에서 외가격으로 갈수록 음의 값을 갖는 반면, 콜옵션 헤지 포트폴리오 수익률의 왜도는 내가격에서 외가격으로 갈수록 양의 값을 갖는다. 특히 외가격 풋옵션에 대한 헤지 포트폴리오 수익률의 왜도는 음수인 반면, 외가격 콜옵션의 경우에는 양의 왜도를 나타낸다. 예를 들어 1개월 만기, 가격도 그룹 1의 풋옵션에 대한 헤지 포트폴리오의 왜도는 -1.99인 반면, 1개월 만기, 가격도 그룹 5의 콜옵션에 대한 헤지 포트폴리오의 왜도는 1.01이다. 이와 같은 결과가 나타나는 이유는 기초자산의 수익률이 음의 왜도를 갖기 때문으로 설명할 수 있다. 실제로 본 연구의 표본기간인 1996년 1월부터 2007년 6월까지 S&P 500 지수의 일변수수익률의 왜도는 -0.11이다. S&P 500 지수의 음의 왜도는 콜옵션 헤지 포트폴리오 투자자에게는 유리하게 작용하는 반면 풋옵션 헤지 포트폴리오의 투자자에게는 불리하게 작용하며, 높은 행사가격의 옵션보다는 낮은 행사가격의 옵션에 대한 헤지 포트폴리오 투자자에게 불리하게 작용한다.

전략 1의 결과는 다소 차이는 있지만 다른 전략의 결과에서도 모두 동일하게 발견할 수 있다. 실현변동성 대신 내재변동성을 헤지 계수의 계산에 사용하거나, 또는 Black, Scholes (1973) 모형 대신 Heston (1993) 모형 또는 Bates (1991) 모형을 사용하고 옵션가격으로부터 추정된 모수를 대용치로 사용하더라도 유사한 결과를 얻을 수 있다. 평균, 표준편차, 왜도의 경향의 관점에서 살펴볼 때 헤지 포트폴리오의

수익률의 모형위험에 대한 민감도는 높지 않다고 말할 수 있다. 이와 같은 결과는 2장에서의 살펴본 시뮬레이션 분포의 결과와 일치한다.

헤지 포트폴리오 수익률의 왜도는 평균-표준편차의 교환관계와 관련이 있는 것으로 보인다. 이를 논의하기 위하여 전략별, 만기별, 가격도 그룹별 헤지 포트폴리오의 평균-표준편차의 교환관계를 그림 4에 나타내었다. 단, 평균-표준편차 교환관계를 효과적으로 보여주기 위하여 3개월 만기 옵션에 대한 헤지 포트폴리오는 표시하지 않았다.⁴⁾ 콜옵션은 십자표식으로 나타내었고, 풋옵션은 별표식으로 나타내었으며, 콜옵션과 풋옵션에 대하여 각각 만기별, 가격도 그룹별, 전략별로 20개씩의 표식을 나타내었다. 표식 옆의 A_{ijk} 에서 A 는 콜옵션 또는 풋옵션을 나타내며, i 는 가격도 그룹, j 는 헤지 대상 옵션의 만기, k 는 헤지 전략을 나타낸다. 그림 4으로부터 콜옵션과 풋옵션의 경우 모두 평균-표준편차의 함수관계를 뚜렷하게 관찰할 수 있다. 그러나 풋옵션의 경우 평균-표준편차가 양의 함수관계를 가지는 반면, 콜옵션의 경우 양의 함수관계가 아닌 상수함수 형태의 관계가 발견된다. 즉, 풋옵션의 경우 외가격 옵션으로 갈수록, 만기가 길어질수록 평균과 표준편차가 모두 증가한다. 반면에 콜옵션의 경우에는 외가격 옵션으로 갈수록 표준편차는 증가하지만, 평균은 모두 0과 크게 다르지 않은 양상을 나타내고 있다.

이상의 결과는 풋옵션이 합리적인 가격에 거래가 되어 있음을 암시한다. 헤지 포트폴리오의 수익률은 옵션의 시장가격이 반영된 수익률이므로, 다른 가격도 그룹의 옵션들에 대한 헤지 포트폴리오 수익률이 유사한 평균-표준편차 교환관계를 나타낸다는 사실은 적어도 특정 옵션이 다른 옵션과 비교하여 고평가되어 있거나 저평가되어 있지 않음을 의미한다. 이러한 관점에서 외가격 풋옵션의 가격은 비이성적으로 과대평가된 일종의 퍼즐 (Puzzle)이라기보다는 헤지 위험에 대한 대가라고 말할 수 있다.

콜옵션과 풋옵션의 평균-표준편차 교환관계가 다른 양상은 왜도에 의하여 설명될 수 있다. Kraus, Lizenberger (1976)에 의하면 합리적인 투자자의 효용함수는 분산에 대한 위험회피성향과 양의 왜도에 대한 선호를 나타내야 한다. 풋옵션의 경우에는 표준편차가 높은 외가격 옵션의 헤지 포트폴리오의 수익률이 낮은 왜도를 나타내므로 이에 대한 위험 프리미엄 (Risk Premium)이 추가적으로 반영되어야 한다. 반면 콜옵션의 경우에는 표준편차가 높은 외가격 옵션의 헤지 포트폴리오의 수익률이 오히려 높은 왜도를 나타내므로 상대적으로 위험 프리미엄이 낮을 것이다. 그러나 콜옵션과 풋옵션의 평균-표준편차 교환관계의 차이가 왜도 차이에 의하여 설명될 수 있는지의 여부는 좀 더 면밀하게 살펴볼 필요가 있으며, 다음 장에서 이에 대한 실증분석결과를 제시한다.

4) 3개월 만기 옵션에 대한 헤지 포트폴리오의 경우 표본의 크기가 작기 때문에 이상치 (Outlier)에 의하여 분산이 매우 크게 계산되는 경우가 발생하였다.

4. 헤지 포트폴리오 수익률 분포의 동일성 검정

본 장에서는 앞서 만기별, 가격도 그룹별로 다양한 옵션들에 대한 헤지 포트폴리오의 수익률 사이에 균형관계가 성립하는지 살펴본다. 즉, 앞서 살펴본 바와 같이 헤지 포트폴리오 수익률 사이의 평균-표준편차 교환관계가 적절한지, 그리고 콜옵션 헤지 포트폴리오 수익률과 풋옵션 헤지 포트폴리오 수익률의 상이한 평균-표준편차 교환관계가 각각의 왜도에 대한 투자자의 선호도에 의하여 설명될 수 있는지 검증한다. 검증결과 헤지 포트폴리오의 수익률 사이에 균형관계가 성립한다면, 변동성 스마일 현상이 헤지 오차에 대한 위험 프리미엄에 기인한다고 결론지을 수 있으며 서론에서 제기한 질문에 대한 다음과 해답을 제시할 수 있다. 첫째, 헤지 오차를 고려하지 않은 무차익거래 모형은 변동성 스마일 현상을 완전하게 설명할 수 없다. 둘째, 외가격 풋옵션의 가격이 상대적으로 높은 까닭은 헤지 오차에 대한 위험 프리미엄이 가격에 반영된 결과이다. 외가격 풋옵션에 대한 초과수요가 발생하는 경우 위험 프리미엄이 가격에 반영되어 내재변동성이 높게 나타날 수 있다. 셋째, 위험 프리미엄의 크기는 위험의 크기와 투자자의 위험회피성향으로 설명될 수 있다. 검증방법으로 먼저 합리적인 투자자의 효용함수를 이용하여 만기별, 가격도 그룹별로 다양한 옵션들에 대한 헤지 포트폴리오 수익률에 대한 기대효용이 동일한지의 여부를 검정한다.

4.1. 효용함수를 이용한 검정

효용함수는 이차 효용함수 (Quadratic Utility Function), 멱 효용함수 (Power Utility Function), 지수 효용함수 (Negative Exponential Utility Function)를 이용한다. 이차 효용함수는 자산의 수익률에 대한 평균과 분산에 대한 선호도만을 반영하는 반면, 멱 효용함수와 지수 효용함수는 수익률에 대한 고차 모멘트 (Higher Moments)에 대한 선호도도 반영한다는 점에서 비교가 될 수 있다. 멱 효용함수의 경우에는 상대위험회피도 (Relative Risk Aversion)이 일정한 효용함수이며, 지수 효용함수는 절대위험회피도 (Absolute Risk Aversion)이 일정한 효용함수이다. 각각의 효용함수의 형태를 표 5에 나타내었다. a 는 각각의 효용함수에 대한 위험회피상수 (Risk Aversion Coefficient)를 나타낸다. 위의 효용함수를 이용하여 위험회피상수가 주어졌을 때 다음과 같이 두 헤지 포트폴리오의 수익률 r_i 와 r_j 에 대한 기대효용이 같다는 귀무가설을 도출할 수 있다.

$$\begin{aligned} E[U(r_i; a)] - E[U(r_j; a)] &= \mu + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim (0, \sigma_\varepsilon^2) \\ H_0 : \mu &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

일반적으로 위험회피상수 a 는 알려져 있지 않으므로 위의 식에서 두 헤지 포트폴리오 수익률의 기대효용 편차를 최소화하는 조건으로부터 위험회피상수를 추정하고, 귀무가설을 검정한다. 이와 같이 추정된 위험회피상수가 일반적으로 알려져 있는 범위와 일치하는지 선행연구와 비교해볼 수 있다. Bliss, Panigirtzoglou (2004)는 S&P 500 지수를 이용한 연구에서 멱 효용함수의 위험회피계수는 3.37부터 9.52의 값을 나타내며, 지수 효용함수의 위험회피계수는 4.36에서 15.97사이의 값을 나타낸다고 보고하였다. 다른 선행연구에서는 멱 효용함수 형태의 상대위험회피도가 일정한 효용함수를 이용한 실증연구로부터 위험회피계수를 보고하였는데, Hansen, Singleton (1982, 1984)는 위험회피계수를 0과 1사이로 추정하였으며, Mehra, Prescott (1985)는 55, Ferson, Constantinides (1991)는 0과 12사이, Cochrane, Hansen (1992)은 40과 50사이, 그리고 Ait-Sahalia, Lo (2000)는 12.7의 위험회피계수를 보고한 바 있다.

식 (18)로부터 위험회피계수를 직접 추정하는 것과는 달리 효용함수를 2차 또는 3차 테일러 전개 (Taylor Expansion)로 근사하는 방법을 사용할 수 있다. 이로부터 선형 회귀방정식 (Regression Equation)을 얻을 수 있는데 각각의 효용함수에 대한 회귀방정식을 표 5에 나타내었다. 회귀방정식을 이용하는 방법은 식 (18)의 기대효용 동일성 검정식을 헤지 포트폴리오 수익률의 모멘트로 표현할 수 있는 장점이 있다. 이차 효용함수의 경우 헤지 포트폴리오 수익률의 평균차이와 2차 모멘트 사이의 관계식을 유도할 수 있으며, 멱 효용함수와 지수 효용함수의 경우 헤지 포트폴리오 수익률의 차이가 2차 모멘트와 3차 모멘트 차이에 의하여 설명되는지 검정할 수 있다. 이 때 기대효용의 동일성에 대한 귀무가설은 회귀방정식의 상수항이 0인지의 여부를 검정하는 것이며, 2차 모멘트 항과 3차 모멘트 항의 계수는 위험회피계수와 관계가 있다. 자세한 사항은 표 5에 정리되어 있다.

표 6에 서로 다른 헤지 포트폴리오의 수익률의 기대효용에 대한 동일성 검정결과를 나타내었다. 먼저 Panel A에 실현변동성과 Black-Scholes 모형을 사용한 전략에 대한 결과를 나타내었다. 직접적 접근방법 (Direct Approach)은 식 (18)을 이용하여 계산한 결과로써, 이차 효용함수, 멱 효용함수, 지수 효용함수의 모든 경우에 기대효용의 차이가 0 이라는 귀무가설을 기각할 수 없다. 예를 들어 이차 효용함수의 경우 기대효용의 차이는 0.0023인 반면 표준오차 (Standard Error)는 1.6374로 상대적으로 매우 높은 수치를 나타내고 있다. 추정된 위험회피계수는 이차 효용함수, 멱 효용함수, 지수 효용함수의 경우 각각 11.63, 9.29, 10.08로 대동소이한 결과를 나타내주고 있으며 선행연구에서 보고된 결과를 벗어나지 않는다. 직접적 접근방법을 사용한 기대효용의 동일성 검정결과는 Panel B, C, D에서 알 수 있듯이 다른 헤지 전략에서도 유사한 결과가 발견된다.

간접적 접근방법은 효용함수별로 표 5에 정리된 회귀방정식을 이용하여 추정

결과이다. 실제 회귀분석을 실시함에 있어서는 표 4의 결과와 비교하기 위하여 비중양 2차, 3차 모멘트를 사용하는 대신 분산과 왜도를 사용하였다. 먼저 Panel A의 결과로부터 세 가지 사실을 확인할 수 있다. 첫째, 어떠한 효용함수를 사용하더라도 상수항이 0이라는 귀무가설은 기각된다. 즉, 헤지 포트폴리오 수익률의 차이가 분산과 왜도의 차이에 의하여 설명되지 않는 부분이 존재한다. 예를 들어 멱 효용함수를 사용한 경우의 상수항은 0.0031이며 표준오차는 0.0008로써 t-통계량은 3.95이다. 이러한 결과는 직접적 접근방법에서의 결과와 상이한 결과로써 근사식을 이용한 차이로 간주된다. 둘째, 수익률의 평균과 분산 간에는 양의 교환관계가 강하게 나타나며, 평균과 왜도 사이에는 음의 교환관계가 강하게 나타난다. 멱 효용함수와 지수 효용함수에 대하여 분산과 왜도 차이에 대한 회귀계수는 각각 6.4262와 -0.0018, 그리고 7.7056과 -0.0016으로 유사한 결과를 나타내고 있으며 모두 통계적으로 유의하다. 이와 같은 결과는 표 4와 그림 4에서 논의한 바와 같이 콜옵션과 풋옵션 헤지 포트폴리오 수익률의 평균-표준편차 교환관계 차이가 왜도에 의하여 설명될 수 있음을 보여준다. 셋째, 헤지 포트폴리오의 수익률의 평균 차이에 대한 분산과 왜도 차이의 설명력은 높게 나타났다. 이차 효용함수, 멱 효용함수, 지수 효용함수 모두 R^2 값이 70%에 근접한 결과를 나타내고 있다. 특히 이차 효용함수의 R^2 값이 지수 효용함수의 R^2 값과 거의 유사한 결과를 나타내는 것은 왜도 차이가 유의하지만, 그 설명력이 제한적이기 때문이다. 실제로 왜도 차이에 대한 t-통계량은 멱 효용함수와 지수 효용함수의 경우 각각 -2.71과 -2.29이다.

Panel B, C, D의 결과와 Panel A의 결과의 차이는 왜도차의 평균차에 대한 설명력이 크게 증가하였다는 점이다. Panel B, C, D에서 왜도차에 대한 회귀계수는 멱 효용함수와 지수 효용함수를 경우 각각 -0.0032와 -0.0039, -0.0048과 -0.0055, -0.0049와 -0.0056으로 Panel A의 결과 (-0.0018과 -0.0016)에 비교하여 절대값이 크게 증가하였다. 반면 표준오차는 줄어들어 t-통계량은 더 크게 증가하였다. 그 결과 왜도차를 고려하지 않는 이차 효용함수의 경우 R^2 값이 Panel B, C, D에서 각각 27.63%, 10.94%, 9.46%로 감소하였다. 이상의 결과로부터 실현변동성과 Black-Scholes 모형을 사용하는 전략이 다른 전략에 비교하여 헤지 포트폴리오의 왜도를 감소시키는 영향이 있다고 주장할 수 있다. 실제로 표 5에서 가격도 그룹 1에 속하는 1개월 만기 헤지 포트폴리오 수익률의 왜도를 비교하면, 전략 1부터 전략 4까지 각각 -1.98, -2.06, -2.47, -2.47로 전략 1의 경우에 가장 낮은 수치를 나타낸다. 그러나 이와 같은 결론을 내리기 위해서는 보다 정교한 검정과정이 필요하다.

5. 결론

본 연구는 변동성 스마일 현상을 옵션의 복제 위험의 관점에서 설명하고자 시도하였다. 변동성 스마일은 기초자산의 분포가 정규분포보다 왜도가 낮고, 첨도가 높기 때문에 관측되는 현상으로 알려져 있으며, 이를 설명하기 위한 체계적 변동성 및 점프 등의 여러 가지 동적 무차익거래 모형들이 개발되어 왔다. 그러나 무차익거래 모형들은 옵션이 기초자산에 의하여 완벽하게 복제될 수 있다는 비현실적인 가정에 근거하고 있으며, 실증분석 결과에서도 변동성 스마일 현상을 부분적으로밖에 설명하지 못하는 단점을 지니고 있다. 반면 거래비용이 존재하고, 기초자산을 연속적으로 거래할 수 없는 경우, 옵션은 완벽하게 복제될 수 없다. 변동성 스마일은 복제 오차에 대한 투자자들의 위험회피성향이 옵션가격에 반영된 결과로 해석할 수 있다.

이를 확인하기 위하여 S&P 500 지수옵션을 시장가격에 매도하고 이를 만기까지 헤지하는 헤지 포트폴리오에 대한 실증분석을 실시하였다. 헤지 포트폴리오의 수익률을 복제오차로 정의하고 이를 살펴본 결과 헤지 포트폴리오 수익률의 분포는 가격도별로 크게 다른 양상을 나타내었으나, 수익률의 평균차이는 분산차이와 왜도차이로 설명될 수 있음을 확인하였다. 복제오차에 대한 투자자의 위험회피성향을 반영하기 위하여 서로 다른 수익률 분포가 기대효용의 관점에서 동일하다는 귀무가설 검정한 결과 귀무가설을 기각할 수 없었다. 이와 같은 결과는 헤지 모형에 관계없이 모두 동일하게 관측되었다.

본 연구는 네 가지 측면에서 확장될 수 있다. 첫째, 복제오차에 대한 투자자들의 위험회피성향을 기대효용 이외의 다른 관점에서 살펴볼 필요가 있다. 위험 프리미엄은 체계적 위험요인에 의하여 설명될 수 있으므로 이를 활용한 연구가 필요하다. 둘째, 복제위험의 원인을 미시적 관점에서 조사할 필요가 있다. 본 연구의 2장에서 가격도에 따라 복제오차의 분산과 왜도의 크기가 변화하고 이러한 양상에 옵션가격에 반영됨을 밝혔다. 나아가 변동성의 변화가 가격도별로 옵션가격에 반영되는 양상도 살펴볼 필요가 있다. 셋째, 중장기 옵션에 대한 실증분석을 실시할 필요가 있다. 본 연구에서는 표본의 크기의 제약 때문에 3개월 이하의 단기 옵션에 대한 실증분석만을 보고하였다. 부스트랩(Bootstrap) 방법 등을 이용하여 중장기 옵션에 대한 실증분석을 실시할 수 있을 것이다. 마지막으로 S&P 500 지수옵션과 비교하여 개별 주식옵션의 경우 대칭적인 변동성 스마일 현상을 나타내는 것으로 알려져 있는데, 이 또한 복제오차에 대한 위험회피성향으로 설명될 수 있는지 실증연구가 필요하다.

참 고 문 헌

- Ait-Sahalia, Yacine and Andrew W. Lo, 2000, Non-parametric Risk Management and Implied Risk Aversion, *Journal of Econometrics* 94(1 - 2), 9-51
- Bakshi, Gurdip, Cao, Charles, and Chen, Zhiwu, 1997, Empirical performance of alternative option pricing models, *Journal of Finance* 52, 2003-2049.
- Bakshi, Gurdip and Kapadia, Nikunj, 2003, Delta-hedged gains and the negative market volatility risk premium, *The Review of Financial Studies*.
- Bates, D. (1996). Jump and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options. *The Review of Financial Studies* 9, 69-107.
- Bates, David S., 2000, Post-'87 crash fears in the S&P 500 futures options market, *Journal of Econometrics* 94, 181-238.
- Black, Fischer and Scholes, Myron, 1973, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* 81, 637-659.
- Bliss, Robert R., Panigirtzoglou, Nikolaos, 2004, Option-Implied Risk Aversion Estimates, *The Journal of finance* 59, 407-446.
- Bondarenko, Oleg, 2001. On market efficiency and joint hypothesis. University of Illinois at Chicago.
- Boyle, P. Phelim, Emanuel, David, 1980, Discretely Adjusted Option Hedges, *The Journal of Finance* 8, 259-282.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross (1985). A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica* 53(2), 385-407.
- Dumas, Bernard, Fleming, Jeff, and Whaley, Robert E., 1998, Implied volatility functions: Empirical tests, *Journal of Finance* 53, 2059-2106.
- Eraker, Born, Johannes, Michael, and Polson, Nicholas, 2002, The impact of jumps in volatility and return, *Journal of Finance*.
- Ferson, Wayne E. and George M. Constantinides, 1991, Habitat Persistence and Durability in Aggregate Consumption: Empirical Tests, *Journal of Financial Econometrics* 29, 199-240.
- Hansen, Lars P. and Kenneth J. Singleton, 1982, Generalized Instrumental Variables Estimation of Nonlinear Rational Expectations Models, *Econometrica* 50, 1269-1286.
- Hansen, Lars P. and Kenneth J. Singleton, 1984, Errata: Generalized Instrumental Variables Estimation of Nonlinear Rational Expectations Models, *Econometrica* 52, 267-268.
- Heston, S. (1993). A Closed-Form Solution of Options with Stochastic Volatility

- with Applications to Bond and Currency Options. The *Review of Financial Studies* 6, 327-343.
- Jackwerth, Jens C., 2000, Recovering risk aversion from option prices and realized returns, *Review of Financial Studies* 13, 433-451.
- Kraus, A.K. and Litzenberger, R.H., 1976, Skewness preference and the valuation of risky assets, *Journal of Finance* 31, 1085-1100.
- Kon, Stanley J., 1984, Models of Stock Returns - A Comparison, *The Journal of finance* 39, 147-165.
- Mehra, R. and Edward Prescott, 1985, The Equity Premium: A Puzzle, *Journal of Monetary Economy* 15, 145-161.
- Pan, J., 2002, The Jump-Risk Premia Implicit in Options: Evidence from an Integrated Time-Series Study, *Journal of Financial Economics* 63, 3-50.

표 1 가격도 그룹 (Moneyness Group)의 정의

옵션의 가격도는 옵션의 델타로 정의한다. 가격도별로 옵션을 5개의 그룹으로 구분하였으며, 콜옵션과 풋옵션에 대한 가격도 구간은 아래 표와 같다. 가격도의 절대값이 0.02보다 작거나 0.98보다 큰 옵션은 본 연구에서 제외되었다.

Group	Labels	Range
1	Deep in-the-money (DITM) call	$0.875 < D_C \leq 0.98$
	Deep out-of-the-money (DOTM) put	$-0.125 < D_P \leq -0.02$
2	In-the-money (ITM) call	$0.625 < D_C \leq 0.875$
	Out-of-the-money (OTM) put	$-0.375 < D_P \leq -0.125$
3	At-the-money (ATM) call	$0.375 < D_C \leq 0.625$
	At-the-money (ATM) put	$-0.625 < D_P \leq -0.375$
4	Out-of-the-money (OTM) call	$0.125 < D_C \leq 0.375$
	In-the-money (ITM) put	$-0.875 < D_P \leq -0.625$
5	Deep out-of-the-money (DOTM) call	$0.02 < D_C \leq 0.125$
	Deep in-the-money (DITM) put	$-0.98 < D_P \leq -0.875$

표 2 S&P 500 지수옵션의 가격도별 내재변동성

만기별, 가격도별 내재변동성 (IV)의 평균 및 내재변동성과 실현변동성과의 차이 (IV-RV)의 평균을 관측치수, 거래량, 평균 델타와 함께 나타내었다. Panel A에는 콜옵션에 대한 결과를, Panel B에는 풋옵션에 대한 결과를 나타내었으며, 3개월 이후에 만기가 도래하는 옵션의 관측치는 매우 작아 제외하였다.

Term to Maturity	Moneyness Category					
	1	2	3	4	5	
<i>Panel A: Call Options</i>						
	Obs	623	741	646	765	488
1 M	Volume	3,885,327	6,940,072	7,580,203	8,174,379	4,809,689
	Delta	0.9382	0.7563	0.5010	0.2437	0.0675
	IV	0.2277	0.2025	0.1806	0.1614	0.1550
	IV-RV	0.0663	0.0349	0.0105	-0.0053	0.0009
	Obs	264	344	326	317	183
2 M	Volume	579,410	1,625,929	2,430,502	2,102,731	1,060,996
	Delta	0.9368	0.7543	0.5027	0.2452	0.0697
	IV	0.2328	0.2028	0.1801	0.1572	0.1581
	IV-RV	0.0694	0.0397	0.0124	-0.0041	-0.0031
	Obs	77	89	97	74	47
3 M	Volume	337,861	730,800	868,489	907,206	420,444
	Delta	0.9378	0.7562	0.5124	0.2469	0.0685
	IV	0.2416	0.2122	0.1953	0.1717	0.1624
	IV-RV	0.0880	0.0532	0.0237	0.0006	-0.0084
<i>Panel B: Put Options</i>						
	Obs	626	741	645	630	177
1 M	Volume	9,455,679	10,581,775	6,544,116	3,027,893	418,239
	Delta	-0.0614	-0.2437	-0.4992	-0.7436	-0.9285
	IV	0.2273	0.2022	0.1814	0.1709	0.1981
	IV-RV	0.0661	0.0348	0.0110	0.0056	0.0298
	Obs	258	343	325	228	72
2 M	Volume	2,140,490	3,056,046	2,136,569	834,502	141,980
	Delta	-0.0639	-0.2449	-0.4961	-0.7345	-0.9306
	IV	0.2353	0.2036	0.1820	0.1696	0.2302
	IV-RV	0.0714	0.0409	0.0138	0.0112	0.0381
	Obs	72	88	100	51	23
3 M	Volume	1,058,573	1,134,483	792,525	263,436	73,675
	Delta	-0.0619	-0.2408	-0.4876	-0.7323	-0.9345
	IV	0.2419	0.2089	0.1950	0.1810	0.2330
	IV-RV	0.0857	0.0522	0.0239	0.0089	0.0170

표 3 모형별 모수 추정 결과

모형별 모수 추정결과와 평균과 표준편차를 나타내었다. 모수는 헤지 포트폴리오가 구성되는 시점에서 추정되며 총 138번 관측치가 존재한다. Black-Scholes 모형의 경우 실현변동성 (RV)과 평균 내재변동성 (IV)을 나타내었으며, Heston 모형의 경우 κ , θ , σ , ρ , v_0 는 각각 평균회귀속도, 분산의 장기평균, 분산의 변동성, 기초자산과 분산과정의 상관계수, 그리고 현재 시점에서의 분산 수준을 나타낸다. Heston 모형의 모수는 옵션가격으로부터 계산된 내재변동성과 이론가격으로부터 계산된 내재변동성을 최소화하는 방법으로 추정하였으며, 이 때의 평균 RMSE (Root Mean Squared Error)을 함께 나타내었다.

Panel A: Black-Scholes Model Parameter						
	RV	IV				
Mean	0.1632	0.2424				
Stdev	0.0641	0.0804				
Panel B: Heston Model Parameters						
	κ	θ	σ	ρ	V_0	RMSE
Mean	15.8705	0.0505	1.0618	-0.6774	0.0387	0.0072
Stdev	10.7670	0.0338	0.3204	0.1668	0.0335	

표 4 S&P 지수옵션에 대한 전략별 헤지 포트폴리오의 수익률 분포

S&P 지수옵션에 대한 헤지 포트폴리오의 수익률 분포를 만기별, 가격도 그룹별로 나타내었다. 가격도 그룹은 표 1에서 정의하였으며, 3개월 이후에 만기가 도래하는 옵션은 관측치수가 작아 제외하였다. 헤지 전략은 헤지 방법과 모수 추정방법에 따라 4가지로 분류하였다. 전략 1은 Black-Scholes 모형과 과거 60일 동안의 기초자산 수익률로 계산한 실현변동성을 사용하였다. 전략 2는 Black-Scholes 모형과 내재변동성의 평균치를 이용하였다. 전략 3은 Heston 모형과 옵션가격으로부터 추정된 모수를 사용하였다. 전략 4는 Heston 모형과 옵션 가격으로부터 추정된 모수를 이용하여 계산된 최소분산 헤지 계수를 사용하였다.

Term to Maturity	Call Option Admness Group					Put Option Admness Group					
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
<i>Panel A: Strategy 1 (Hedge with Black-Scholes Model and Realized Volatilities)</i>											
1M	OBS	611	727	634	731	480	614	727	634	618	175
	MEAN	0.0011	0.0023	0.0027	0.0012	0.0079	0.0049	0.0129	0.0055	0.0024	0.0031
	STD	0.0039	0.0045	0.0098	0.0192	0.0232	0.0593	0.0197	0.0088	0.0057	0.0023
	SKEW	-1.4333	-0.4399	-0.5745	-1.7288	1.0143	-1.9844	-1.6124	-0.3545	-1.9241	1.0191
	KURT	87194	5.0982	5.0888	13.2220	7.2457	12.1430	9.7142	3.9799	12.4200	5.2281
	MIN	-0.0204	-0.0245	-0.0441	-0.1352	-0.0754	-0.3398	-0.0991	-0.0314	-0.0323	-0.0024
	MAX	0.0110	0.0227	0.0327	0.0434	0.1309	0.2115	0.0405	0.0281	0.0150	0.0107
2M	OBS	240	338	320	311	181	254	337	320	224	72
	MEAN	0.0005	0.0018	0.0041	0.0045	-0.0024	0.0583	0.0148	0.0094	0.0043	0.0037
	STD	0.0040	0.0101	0.0141	0.0238	0.0534	0.0788	0.0279	0.0124	0.0047	0.0033
	SKEW	-0.8900	-0.3845	-0.1183	-0.7380	-0.8430	-1.4031	-1.2348	-0.5889	-0.4330	-0.3272
	KURT	54159	5.2824	4.7358	4.9234	5.8794	7.6389	5.9835	4.7422	3.7194	4.5451
	MIN	-0.0204	-0.0333	-0.0447	-0.0972	-0.1488	-0.3339	-0.0945	-0.0374	-0.0159	-0.0039
	MAX	0.0199	0.0344	0.0475	0.0825	0.1774	0.2394	0.0818	0.0417	0.0230	0.0125
3M	OBS	77	89	97	74	47	72	88	98	51	23
	MEAN	-0.0009	0.0001	0.0097	0.0133	0.0139	0.0524	0.0175	0.0143	0.0105	0.0058
	STD	0.0124	0.0129	0.0149	0.0143	0.0538	0.2177	0.0390	0.0141	0.0054	0.0014
	SKEW	-2.6944	-0.1454	0.9079	-1.0839	1.2049	-3.4925	-1.0401	0.5204	1.4734	-0.5855
	KURT	120200	3.1804	3.2447	7.9347	5.7099	14.1870	4.4790	2.9073	4.5473	3.9492
	MIN	-0.0595	-0.0404	-0.0139	-0.0539	-0.0710	-0.9498	-0.1584	-0.0048	0.0029	0.0019
	MAX	0.0214	0.0300	0.0593	0.0453	0.1284	0.3831	0.1152	0.0542	0.0278	0.0079
<i>Panel B: Strategy 2 (Hedge with Black-Scholes Model and Implied Volatilities)</i>											
1M	OBS	740	1,014	974	927	183	810	1,014	945	544	115
	MEAN	0.0002	0.0017	0.0031	0.0007	0.0041	0.0258	0.0104	0.0058	0.0032	0.0028
	STD	0.0025	0.0052	0.0114	0.0218	0.0389	0.0287	0.0137	0.0102	0.0073	0.0014
	SKEW	-1.0471	0.4082	-0.4449	0.5430	3.0214	-2.0577	-0.4497	-0.2443	0.0410	0.9500
	KURT	87313	4.2399	4.0799	4.0492	13.5580	13.5430	4.2357	3.9480	3.4444	4.3384
	MIN	-0.0129	-0.0149	-0.0379	-0.0545	-0.0529	-0.1530	-0.0597	-0.0293	-0.0219	0.0000
	MAX	0.0073	0.0197	0.0332	0.0877	0.1822	0.1003	0.0443	0.0332	0.0243	0.0091
2M	OBS	301	421	435	378	97	307	422	430	204	50
	MEAN	-0.0008	0.0015	0.0049	0.0058	0.0079	0.0377	0.0143	0.0104	0.0074	0.0037
	STD	0.0044	0.0077	0.0140	0.0284	0.0422	0.0529	0.0190	0.0124	0.0077	0.0015
	SKEW	-1.7890	0.2908	0.0482	1.0258	2.2049	-3.4484	-0.1092	-0.1340	0.3940	1.8024
	KURT	130340	3.5120	3.0198	5.1232	7.1980	25.1490	3.4708	3.5195	2.8255	10.4950
	MIN	-0.0314	-0.0173	-0.0315	-0.0444	-0.0457	-0.3718	-0.0411	-0.0350	-0.0087	0.0011
	MAX	0.0112	0.0248	0.0418	0.1358	0.2371	0.1544	0.0447	0.0434	0.0291	0.0107
3M	OBS	87	124	135	87	17	92	122	133	44	18
	MEAN	-0.0024	-0.0003	0.0109	0.0144	0.0155	0.0483	0.0149	0.0177	0.0118	0.0050
	STD	0.0049	0.0084	0.0174	0.0353	0.0545	0.0438	0.0254	0.0153	0.0073	0.0005
	SKEW	-0.4149	-1.0245	0.3358	2.2740	2.1294	-0.4540	-2.3703	0.1545	0.1448	0.0249
	KURT	54552	4.3827	2.1429	9.7802	5.9444	5.7545	11.8490	2.2148	3.4883	1.7511
	MIN	-0.0220	-0.0305	-0.0179	-0.0208	-0.0194	-0.1150	-0.1190	-0.0123	-0.0034	0.0042
	MAX	0.0091	0.0189	0.0477	0.1595	0.1545	0.1780	0.0533	0.0532	0.0297	0.0059

표 4 S&P 지수옵션에 대한 전략별 헤지 포트폴리오의 수익률 분포 (계속)

<i>Panel C: Strategy 3 (Hedge with Heston Model and Implied Parameters)</i>											
1M	OBS	1,019	1,022	437	420	405	1,078	1,014	434	481	137
	MEAN	0.0007	0.0024	0.0013	0.0013	0.0040	0.0023	0.0138	0.0044	0.0033	0.0024
	STD	0.0032	0.0049	0.0114	0.0198	0.0328	0.0027	0.0194	0.0108	0.0044	0.0014
	SKEW	-14.594	-0.8934	-0.4978	-0.0054	2.7188	-2.4711	-1.5731	-0.3950	0.3149	0.7488
	KURT	90420	4.5833	4.3110	5.0333	14.0880	12.8840	8.9911	3.2431	4.5207	4.3143
	MIN	-0.0154	-0.0345	-0.0441	-0.0773	-0.0431	-0.1434	-0.0919	-0.0293	-0.0227	-0.0027
	MAX	0.0095	0.0194	0.0293	0.0780	0.2379	0.1024	0.0541	0.0304	0.0293	0.0088
2M	OBS	402	490	308	257	157	415	483	309	141	58
	MEAN	-0.0004	0.0022	0.0044	0.0052	-0.0010	0.0438	0.0180	0.0104	0.0072	0.0031
	STD	0.0031	0.0109	0.0140	0.0294	0.0444	0.0505	0.0271	0.0134	0.0079	0.0023
	SKEW	-1.7193	-0.9204	-0.1441	0.5047	3.4924	-3.8845	-1.1499	-0.4744	0.8423	0.3344
	KURT	10.7820	4.5295	3.1028	5.5740	32.8000	30.2430	54.874	3.5734	4.0987	5.8189
	MIN	-0.0333	-0.0514	-0.0344	-0.0848	-0.1310	-0.4342	-0.0973	-0.0409	-0.0077	-0.0031
	MAX	0.0117	0.0278	0.0424	0.1187	0.5447	0.1434	0.0782	0.0404	0.0330	0.0113
3M	OBS	115	139	98	40	33	120	140	95	33	17
	MEAN	-0.0013	0.0027	0.0105	0.0141	0.0143	0.0587	0.0232	0.0178	0.0100	0.0054
	STD	0.0043	0.0124	0.0177	0.0353	0.0414	0.0025	0.0343	0.0159	0.0071	0.0004
	SKEW	-0.9247	-0.4831	0.4344	3.7422	1.8017	-2.0035	-2.7111	0.1983	1.9477	0.0444
	KURT	83424	4.9042	2.5789	17.9320	5.4139	12.4340	14.1090	1.8734	7.7279	2.8334
	MIN	-0.0234	-0.0497	-0.0150	-0.0120	-0.0800	-0.1303	-0.1904	-0.0057	-0.0004	0.0041
	MAX	0.0089	0.0402	0.0404	0.2034	0.1947	0.1138	0.0729	0.0548	0.0349	0.0044
<i>Panel D: Strategy 4 (Minimum Variance Hedge with Heston Model and Implied Parameters)</i>											
1M	OBS	1,009	1,024	442	419	411	1,078	1,014	434	481	137
	MEAN	0.0007	0.0024	0.0014	0.0014	0.0039	0.0023	0.0138	0.0044	0.0033	0.0024
	STD	0.0031	0.0049	0.0112	0.0194	0.0324	0.0027	0.0194	0.0108	0.0044	0.0014
	SKEW	-13.731	-0.9194	-0.4813	-0.0980	2.4372	-2.4711	-1.5731	-0.3950	0.3149	0.7488
	KURT	87430	4.4841	4.4342	5.2204	15.4870	12.8840	8.9911	3.2431	4.5207	4.3143
	MIN	-0.0148	-0.0344	-0.0445	-0.0798	-0.0433	-0.1434	-0.0919	-0.0293	-0.0227	-0.0027
	MAX	0.0089	0.0191	0.0284	0.0737	0.2313	0.1024	0.0541	0.0304	0.0293	0.0088
2M	OBS	401	481	317	259	158	415	483	309	141	58
	MEAN	-0.0004	0.0019	0.0050	0.0048	0.0009	0.0438	0.0180	0.0104	0.0072	0.0031
	STD	0.0030	0.0104	0.0138	0.0284	0.0710	0.0505	0.0271	0.0134	0.0079	0.0023
	SKEW	-1.4847	-1.0193	-0.2229	0.3133	3.5308	-3.8845	-1.1499	-0.4744	0.8423	0.3344
	KURT	10.4790	4.8718	3.0513	5.4401	27.3570	30.2430	54.874	3.5734	4.0987	5.8189
	MIN	-0.0330	-0.0514	-0.0341	-0.0881	-0.1321	-0.4342	-0.0973	-0.0409	-0.0077	-0.0031
	MAX	0.0119	0.0278	0.0414	0.1083	0.5477	0.1434	0.0782	0.0404	0.0330	0.0113
3M	OBS	114	139	98	40	33	120	140	95	33	17
	MEAN	-0.0013	0.0025	0.0100	0.0141	0.0144	0.0587	0.0232	0.0178	0.0100	0.0054
	STD	0.0043	0.0124	0.0144	0.0348	0.0413	0.0025	0.0343	0.0159	0.0071	0.0004
	SKEW	-1.0132	-0.4503	0.3490	3.7773	1.7788	-2.0035	-2.7111	0.1983	1.9477	0.0444
	KURT	89244	4.9872	2.3407	18.2750	5.5432	12.4340	14.1090	1.8734	7.7279	2.8334
	MIN	-0.0238	-0.0490	-0.0143	-0.0114	-0.0804	-0.1303	-0.1904	-0.0057	-0.0004	0.0041
	MAX	0.0089	0.0404	0.0373	0.2023	0.1931	0.1138	0.0729	0.0548	0.0349	0.0044

표 5 기대효용 동일성 검정을 위한 회귀방정식과 귀무가설

서로 다른 헤지 포트폴리오 수익률이 기대효용의 관점에서 동일한지의 여부를 검정하기 위하여 다음 식을 테일러 전개하여 회귀방정식을 도출하였다.

$$E[U(r_i; a)] - E[U(r_j; a)] = \mu + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim (0, \sigma_\varepsilon^2),$$

효용함수는 이차 효용함수, 멱 효용함수, 지수 효용함수를 이용하였으며, a는 각각의 효용함수에 대한 위험회피계수를 나타낸다. 추정된 회귀계수와 위험회피계수의 관계 및 기대효용의 동일성에 대한 귀무가설, 그리고 회귀계수에 대한 제약조건을 함께 나타내었다.

Quadratic Utility

Functional Form	$U(r) = r - \frac{a}{2}r^2$
Regression Equation	$E(r_i) - E(r_j) = \alpha + \beta[E(r_i^2) - E(r_j^2)] + \varepsilon$
Risk Aversion	$a = 2\beta$
Equivalence Hypothesis	$H_0 : \alpha = 0$

Power Utility

Functional Form	$U(r) = \frac{r^{1-a} - 1}{1-a}$
Regression Equation	$E(\ln r_i) - E(\ln r_j) = \alpha + \beta[E(\ln r_i^2) - E(\ln r_j^2)] + \gamma[E(\ln r_i^3) - E(\ln r_j^3)] + \varepsilon$
Risk Aversion	$a = 2\beta + 1$
Equivalence Hypothesis	$H_0 : \alpha = 0$
Coefficient Constraints	$H_0 : \beta = \frac{a-1}{2} > 0, \gamma = -\frac{2}{3}\beta^2 < 0$

Exponential Utility

Functional Form	$U(r) = \frac{-1}{a}e^{-ar}$
Regression Equation	$E(r_i) - E(r_j) = \alpha + \beta[E(r_i^2) - E(r_j^2)] + \gamma[E(r_i^3) - E(r_j^3)] + \varepsilon$
Risk Aversion	$a = 2\beta$
Equivalence Hypothesis	$H_0 : \alpha = 0$
Coefficient Constraints	$H_0 : \beta = \frac{a}{2} > 0, \gamma = -\frac{2}{3}\beta^2 < 0$

표 6 헤지 포트폴리오 수익률의 기대효용 동일성 검정결과

서로 다른 헤지 포트폴리오 수익률이 기대효용의 관점에서 동일한지의 여부를 검정결과를 나타내었다. 직접적 접근방법 (Direct Approach)는 다음 식을 이용하였다. 효용함수는 이차 효용함수, 멱 효용함수, 지수 효용함수를 이용하였으며, a 는 각각의 효용함수에 대한 위험회피계수이다.

$$E[U(r_i; a)] - E[U(r_j; a)] = \mu + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim (0, \sigma_\varepsilon^2),$$

간접적 접근방법 (Indirect Approach)는 아래 식을 근사한 회귀방정식을 이용하였으며, 수익률의 평균차이가 분산과 왜도의 차이에 의하여 설명될 수 있는지 검정하였다. 표준오차는 괄호 안에 나타내었다.

Utility Function	Direct Approach		Indirect Approach			R^2
	Intercept	Risk Aversion	Intercept	VAR	SKEW	
Panel A: Strategy 1 (Hedge with Black-Scholes Model and Realized Volatilities)						
Quadratic	0.0023 (1.6374)	11.63	0.0029 (0.0008)	7.9961 (0.3588)		0.7254
Power	0.0024 (1.7462)	9.29	0.0031 (0.0008)	6.4262 (0.3854)	-0.0018 (0.0007)	0.6983
Exponential	0.0025 (1.7948)	10.08	0.0030 (0.0008)	7.7056 (0.3766)	-0.0016 (0.0007)	0.7329
Panel B: Strategy 2 (Hedge with Black-Scholes Model and Implied Volatilities)						
Quadratic	0.0041 (1.6899)	10.42	0.0047 (0.0008)	4.4687 (0.5274)		0.2763
Power	0.0032 (1.3493)	8.34	0.0042 (0.0005)	4.0175 (0.3212)	-0.0032 (0.0002)	0.7248
Exponential	0.0032 (1.3426)	9.66	0.0045 (0.0005)	4.8754 (0.3420)	-0.0039 (0.0002)	0.6991
Panel C: Strategy 3 (Hedge with Heston Model and Implied Parameters)						
Quadratic	0.0041 (2.3787)	10.63	0.0051 (0.0011)	3.4384 (0.7155)		0.1094
Power	0.0031 (1.9055)	8.52	0.0046 (0.0006)	3.6331 (0.3972)	-0.0048 (0.0002)	0.7446
Exponential	0.0031 (1.9312)	10.17	0.0049 (0.0006)	5.7722 (0.4051)	-0.0055 (0.0003)	0.7372
Panel D: Strategy 4 (Minimum Variance Hedge with Heston Model and Implied Parameters)						
Quadratic	0.0043 (2.4324)	9.38	0.0052 (0.0011)	2.8406 (0.6411)		0.0946
Power	0.0031 (1.8869)	8.51	0.0046 (0.0006)	3.4375 (0.3607)	-0.0049 (0.0002)	0.7464
Exponential	0.0031 (1.9169)	10.15	0.0050 (0.0006)	5.1423 (0.3737)	-0.0056 (0.0003)	0.7216

그림 1 헤지 포트폴리오 수익률의 평균, 분산 및 왜도

헤지 포트폴리오 수익률의 평균, 분산 및 왜도를 나타내었다. 헤지 포트폴리오는 콜옵션 한 계약의 매도포지션과 이에 대한 헤지로써 기초자산에 대한 매수포지션으로 구성되며, 옵션의 만기까지 헤지 포트폴리오를 일별로 재조정한다. (a)와 (b)는 Black-Scholes 모형을, (c)와 (d)는 추계적 변동성 모형을, 그리고 (e)와 (f)는 점프 모형을 이용하여 기초자산에 대한 델타중립헤지에 대한 결과를 콜옵션과 풋옵션으로 나누어 나타내었다. 각각 10,000번의 시물레이션을 실시하였으며, 시물레이션에 사용된 모수는 다음과 같다. $S = 100$, $X = 80 \sim 120$, $r = 0.05$, $T = 0.5, \Delta t = 0.01$, $\kappa = 2$, $\theta = 0.04$, $\sigma = 0.1$. $\rho = -0.5$, $V = 0.04$, $\lambda = 0$

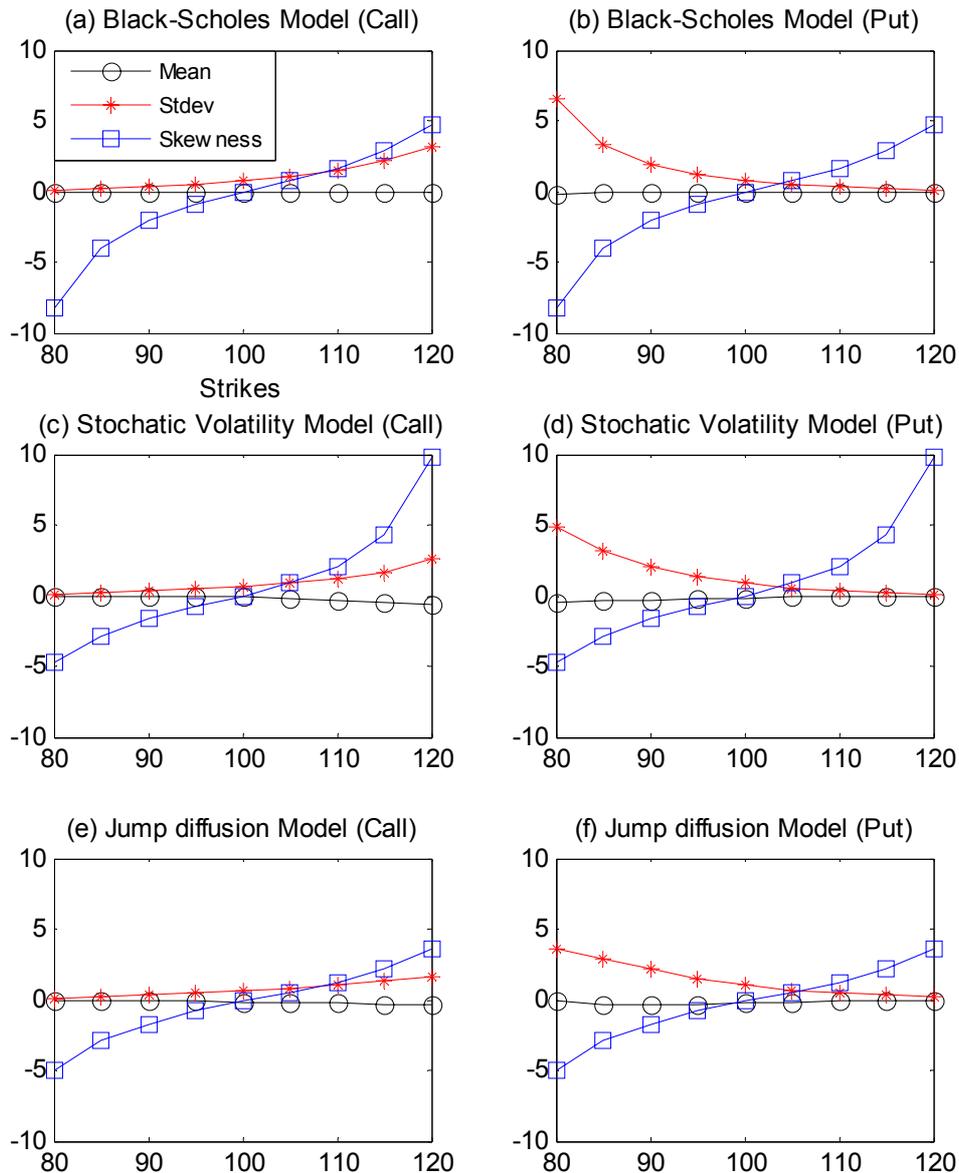


그림 2 S&P 지수옵션의 내재변동성 및 내재변동성과 실행변동성의 차이

만기별, 가격도별 내재변동성 (IV)의 평균 및 내재변동성과 실행변동성과의 차이 (IV-RV)의 평균을 관측치수, 거래량, 평균 델타와 함께 나타내었다. Panel A에는 콜옵션에 대한 결과를, Panel B에는 풋옵션에 대한 결과를 나타내었으며, 3개월 이후에 만기가 도래하는 옵션의 관측치는 매우 작아 제외하였다.

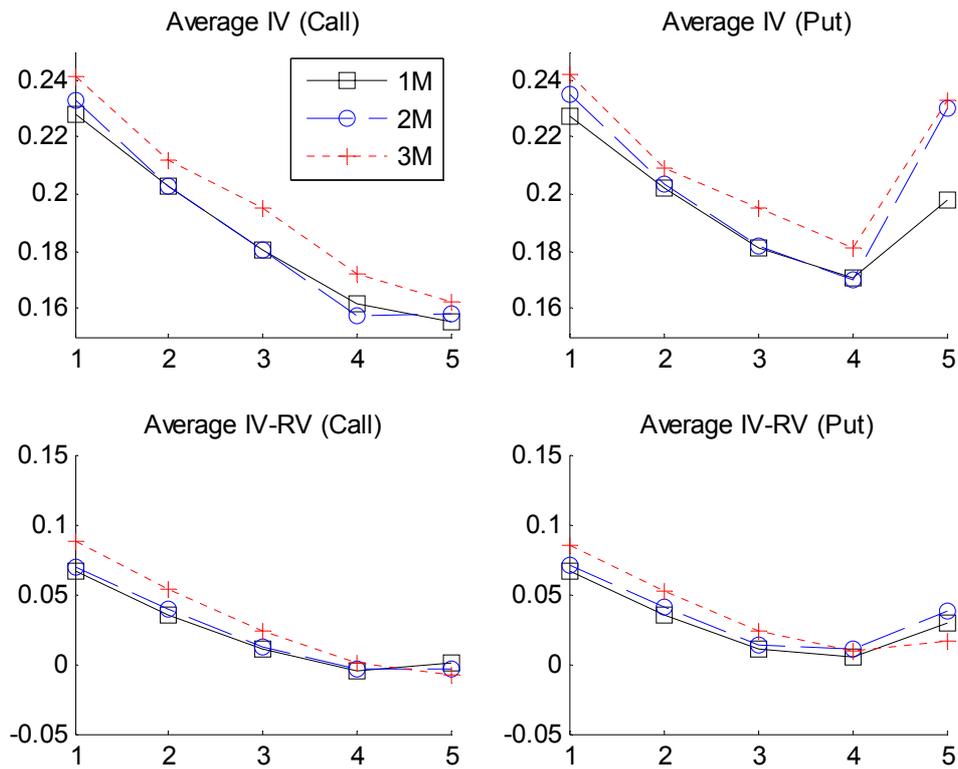


그림 3 S&P 지수옵션에 대한 헤지 포트폴리오의 수익률 분포 (전략 1)

S&P 지수옵션에 대한 헤지 포트폴리오의 수익률 히스토그램을 가격도 그룹별로 나타내었다. 사용된 옵션의 만기는 1개월 만기 옵션이며, 과거 60일 동안의 기초자산 수익률로 계산한 실현변동성과 Black-Scholes 모형을 이용하여 헤지 포트폴리오를 일별로 재조정하였다.

