

상태공간모형에서 주가의 평균회귀현상에 대한 재평가

Reappraisal of Mean-Reversion of Stock Prices in the State-Space Model

전덕빈, 최원혁

한국과학기술원 테크노경영대학원

dbjun@kgsml.kaist.ac.kr, wonhyeok@kgsml.kaist.ac.kr

Abstract

In order to explain a U-shape pattern of stock returns, Fama and French(1988) suggested the state-space model consisting of I(1) permanent component and AR(1) stationary component. They concluded the autoregression coefficient induced from the state-space model follow the U-shape pattern and the U-shape pattern of stock returns was due to both negative autocorrelation in returns beyond a year and substantial mean-reversion in stock market prices. However, we found negative autocorrelation is induced under the assumption that permanent and stationary noise component are independent in the state-space model. In this paper, we derive the autoregression coefficient based on ARIMA process equivalent to the state-space model without the assumption of independency. Based on the estimated parameters, we investigate the pattern of the time-varying autoregression coefficient and conclude the autoregression coefficient from the state-space model of ARIMA(1,1,1) process does not follow a U-shape pattern, but has always positive sign. We applied this result on the data of 1month returns for all NYSE stocks for the 1926-85 period from the Center for Research in Security Prices.

I. 서론

시장의 효율성을 검증하는 한가지 방법으로 초기의 연구자들은 주가 수익률의 자기상관관계를 살펴보는 시도를 하였다. 초기 연구에서는 일간, 주간 주가 수익률에 대한 특별한 자기상관관계를 찾을 수가 없어서 수익을 유의하게 예측할 수 없다는 결론을 내렸다. 하지만 Summers (1986)에 의해 주가가 내재 가치와 괴리가 생기는 현상이 언급되면서 주가에는 불안정적인 부분뿐만 아니라 서서히 수렴하는 안정적인 부분이 존재한다는 주장이 제기되었다.

이후 다양한 관점에서 주가가격의 평균회귀현상에 대한 많은 연구들이 진행되었다. 특히 Fama & French(이하 F&F)(1988)의 연구는 주식수익률의 장기적인 평균회귀현상을 관측하여 제시하였다. 또한 F&F의 연구에서는 관측된 장기적인 평균회귀 현상을 설명하기 위해 주가가격이 안정적인 부분과 영구적인 부분으로 이루어진 모델을 제시하였다. 주가의 안정적인 부

분이 가지는 규칙성으로 인하여 주가의 움직임에 있어서 일정한 특징을 포착할 수 있다고 주장하였다.

F&F가 제시한 모델은 경제학자들이 거시경제변수의 추세와 단기변동을 분리하기 위해서 자주 이용한 비관측인자모형 (Unobserved Component Model)과 동일하다. 비관측인자모형은 하나의 시계열을 관측이 되지 않는 두 요인, 영구적인 추세와 안정적인 단기변동으로 식별하기가 용이하기 때문에 많이 이용된다. 하지만 오차항의 관계가 적절히 고려되지 않는 경우, 비관측인자모형을 이용한 시계열의 분리는 가성분리를 야기하여 모형에 대한 잘못된 해석을 가져올 수 있다. (Joo and Jun, 1997)

II. 주가수익률의 평균회귀를 설명하기 위한 상태공간모형

1. 상관관계를 고려하지 않은 상태공간모형

Fama & French(1988)(이하F&F)는 1926~85년에 걸친 기간에 대하여 모든 NYSE 주식들의 1개월 수익률 자료에 대하여 분석해본 결과 1년이 넘는 보유기간에 대하여 강한 음의 상관관계가 있다는 사실을 관찰하였다. 특히 이러한 음의 상관관계는 점점 강해져서 3~5년의 보유시점에서 가장 크게 나타나고 그 이후에는 점점 약해져서 결국 0으로 수렴하는 U자형의 패턴을 보인다는 것을 관측하였다. F&F는 주가에 안정적인 부분의 존재가 수익률의 평균회귀현상을 설명할 수 있을 것이라고 생각했다. 그래서 F&F는 I(1)의 영구적인 부분, 즉 일차 차분한 값이 안정적인 시계열과 AR(1)의 안정적인 부분으로 이루어진 아래와 같은 상태공간모형을 제시하였다.

$$\begin{aligned} p_t &= q_t + z_t \\ q_t &= u + q_{t-1} + \varepsilon_t \\ z_t &= \phi z_{t-1} + n_t \end{aligned}$$

p_t 는 시점 t 에서 주식의 자연로그 가격이라고 할 때, p_t 는 랜덤워크 부분인 q_t 와 안정적인 부분인 z_t 의 합으로 나타낼 수 있다. u 는 절편이고 ε_t, n_t 는 백색 잡음이다. p_t 는 주식의 자연로그 가격이기 때문에 t 기간부터 $t+T$ 기간까

지의 연속복리 수익률은 다음과 같다.

$$r(t, t+T) = p_{t+T} - p_t \\ = [q_{t+T} - q_t] + [z_{t+T} - z_t]$$

자기회귀계수 $\beta(T)$ 는 $r(t, t+T)$ 에 대하여 $r(t-T, t)$ 를 회귀분석을 하였을 때의 기울기이다. 주가에 존재하는 영구적인 부분과 안정적인 부분은 서로 독립이라고 가정을 할 때, 즉 q_t 와 z_t 는 서로 독립 또는 ε_t 와 n_t 는 서로 독립일 때, 자기회귀계수 $\beta(T)$ 는 다음과 같다.

$$r(t, t+T) = \alpha + \beta(T) \cdot r(t-T, t) + e_t \\ \beta(T) = \frac{\text{Cov}(r(t, t+T), r(t-T, t))}{\text{Var}(r(t-T, t))} \\ = \frac{\text{Cov}(q_{t+T} - q_t, q_t - q_{t-T})}{\text{Var}(r(t-T, t))} + \frac{\text{Cov}(z_{t+T} - z_t, z_t - z_{t-T})}{\text{Var}(r(t-T, t))} \\ = \frac{\text{Cov}(z_{t+T} - z_t, z_t - z_{t-T})}{\text{Var}(z_{t+T} - z_t) + \text{Var}(q_{t+T} - q_t)} \quad (1)$$

만약 주가에 안정적인 부분만 존재한다면, $\beta(T)$ 는 T가 증가함에 따라 -0.5로 수렴하게 된다. 주가에 랜덤워크 부분만 존재한다면 $\beta(T)$ 는 0으로 수렴하게 된다. 초기에는 안정적인 부분의 영향으로 $\beta(T)$ 는 T가 증가함에 따라 점점음의 방향으로 움직이게 된다. 하지만 일정 수준 이상으로 T가 증가하게 되면 $\text{Var}(q_{t+T} - q_t)$ 는 계속 증가하게 되고 나머지 부분은 상수로 수렴하게 된다. 따라서 $\beta(T)$ 는 -0.5에 이르지 못하고 다시 증가하게 되어 결국 0으로 수렴하게 된다. 이와 같은 논리로 $\beta(T)$ 는 U자형의 패턴을 가지게 된다고 F&F(1988)는 주장하였고 주가를 적절하게 설명하는 모형으로 I(1)과 AR(1)으로 구성된 상태공간모형을 제시하였다.

2. 상관관계를 고려한 상태공간모형

앞 절과 같은 논리의 전개는 주가의 안정적인 부분과 영구적인 부분 사이에 상관관계가 없다는 가정이 있기에 가능한 것이다. 하지만 과연 주가에 발생하는 충격이 일시적인 것과 영구적인 것으로 독립적으로 분리될 수 있는 것인지의구심을 제기할 수 있다. 실제로 충격들 사이에 상관관계가 존재한다면 F&F(1988)가 제시한 상태공간모형은 현실을 적절하게 반영하지 못하게 된다. 그러면 자기회귀계수가 U자 패턴을 가진다는 결론은 잘못 되었을 가능성이 있다.

그러므로 우리는 이 논문에서 보다 현실적인 모형 하에서 $\beta(T)$ 의 패턴을 연구해 보고자 한다. 우선 주가의 영구적인 부분과 안정적인 부분의 상관관계를 고려한 경우의 자기회귀계수를 유도하고자 한다. 상관관계가 존재하는 경우, 상태공간모형은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$p_t = (1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} q_t \\ z_t \end{pmatrix} \quad (2a)$$

$$\begin{pmatrix} q_t \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{t-1} \\ z_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_t \\ v_t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_t \\ v_t \end{pmatrix} \sim \text{BVN} \left(0, \sigma_w^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho\lambda^{\frac{1}{2}} \\ \rho\lambda^{\frac{1}{2}} & \lambda \end{pmatrix} \right) \quad (2b)$$

$$\text{where } \lambda = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_w^2}, \rho = \text{Corr}(v_t, w_t)$$

λ 는 오차항의 분산간 비율을, ρ 는 오차항간의 상관관계를 나타낸다. 즉 우리는 ρ 가 존재하는 경우에 대해서 살펴보고자 한다. 기존에 제시된 모형에서 상관관계를 고려하게 되면,

$$\beta(T) = \frac{\text{Cov}(r(t, t+T), r(t-T, t))}{\text{Var}(r(t-T, t))} \\ = \frac{\text{Cov}(q_{t+T} - q_t, q_t - q_{t-T})}{\text{Var}(r(t-T, t))} + \frac{\text{Cov}(z_{t+T} - z_t, z_t - z_{t-T})}{\text{Var}(r(t-T, t))} \\ + \frac{\text{Cov}(z_{t+T} - z_t, q_t - q_{t-T})}{\text{Var}(r(t-T, t))} + \frac{\text{Cov}(q_{t+T} - q_t, z_t - z_{t-T})}{\text{Var}(r(t-T, t))} \quad (3)$$

우선 $\beta(T)$ 는 식(3)과 같이 4개의 항으로 분리된다. 독립이므로 첫 번째, 마지막 항의 분자는 0이 된다. 그래서 $\beta(T)$ 는 두 개의 항만 남게 된다.

$$\beta(T) = \frac{\text{Cov}(z_{t+T} - z_t, z_t - z_{t-T})}{\text{Var}(r(t-T, t))} + \frac{\text{Cov}(z_{t+T} - z_t, q_t - q_{t-T})}{\text{Var}(r(t-T, t))} \quad (4)$$

식(4)의 두번째 항의 분자는 다음과 같이 정리된다.

$$\text{Cov}(z_{t+T} - z_t, q_t - q_{t-T}) = (\phi^T - 1)(1 + \phi + \phi^2 + \dots + \phi^{T-1}) \text{Cov}(v_t, w_t)$$

기존의 연구와는 달리 $\text{Cov}(v_t, w_t)$ 항이 남아서 식(4)의 두 번째 항이 없어지지 않는다. 마찬가지로 분모인 $\text{Var}(r(t-T, t))$ 를 정리해보면,

$$\text{Var}(r(t-T, t)) \\ = \text{Var}(z_t - z_{t-T}) + \text{Var}(q_t - q_{t-T}) + 2\text{Cov}(z_t - z_{t-T}, q_t - q_{t-T}) \\ = \text{Var}(z_{t+T} - z_t) + \text{Var}(q_{t+T} - q_t) + 2(1 + \phi + \phi^2 + \dots + \phi^{T-1}) \text{Cov}(v_t, w_t)$$

기존의 F&F(1988)가 제시했던 모형의 자기회귀계수 식(1)과 비교하기 쉽게 표현하면 자기회귀계수 $\beta(T)$ 는 다음과 같다.

$$\beta(T) = \frac{\text{Cov}(r(t, t+T), r(t-T, t))}{\text{Var}(r(t-T, t))} \\ = \frac{\text{Cov}(z_{t+T} - z_t, z_t - z_{t-T}) + (\phi^T - 1)(1 + \phi + \phi^2 + \dots + \phi^{T-1}) \text{Cov}(v_t, w_t)}{\text{Var}(z_{t+T} - z_t) + \text{Var}(q_{t+T} - q_t) + 2(1 + \phi + \phi^2 + \dots + \phi^{T-1}) \text{Cov}(v_t, w_t)} \quad (5)$$

식(5)에 박스로 표시한 것처럼 분자와 분모에 공분산항이 추가로 존재하기 때문에 자기회귀계수의 행태를 쉽게 예측할 수 없다. 나머지 항도 같은 방식으로 정리를 하고, $\text{Cov}(v_t, w_t) = \sigma_w^2 \rho \lambda^{\frac{1}{2}}$,

$Var(v_t) = \sigma_v^2 = \sigma_w^2 \lambda$ 으로 표현을 하면 아래와 같이 정리할 수 있다.

$$Cov((z_{t+T} - z_t), (z_t - z_{t-T})) = -(1 - \phi^T)^2 \frac{\sigma_w^2 \lambda}{(1 - \phi^2)}$$

$$Var(q_{t+T} - q_t) = T \cdot \sigma_w^2$$

$$Var(z_{t+T} - z_t) = \left(\frac{2(1 - \phi^T)}{(1 - \phi^2)} \right) \cdot \sigma_w^2 \lambda$$

위와 같이 정리된 항들을 식(5)에 대입하면,

$$\beta(T) = \frac{-(1 - \phi^T)\lambda - (1 - \phi^T)(1 + \phi)\rho\lambda^{1/2}}{2 \cdot \lambda + T \cdot \left(\frac{1 - \phi^2}{1 - \phi^T} \right) + 2(1 + \phi)\rho\lambda^{1/2}} \quad (6)$$

III. 상태공간모형의 제약

1. 상태공간모형과 ARIMA의 관계

시계열 자료를 분석하는 모형인 상태공간모형과 Box-Jenkins의 ARIMA 모형은 이론적으로 동일한 관계에 있는 모형이다. 이는 시계열 자료를 분석하기 위한 '축약형 모형'과 이에 대응하는 '구조적 모형'의 관계라고 할 수 있으며, 이들은 일대다의 관계를 가지고 있다. 식(2a), (2b)에서처럼 주가의 평균회귀현상을 위해 상태공간모형은 ARIMA(1,1,1) 과정과 동일한 관계에 놓이게 된다. 주가가 따르는 ARIMA(1,1,1) 과정이 아래와 같다고 하자.

$$(1 - \phi'B)(1 - B)P_t = (1 - \theta B)\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (7)$$

식(2a), (2b)와 식(7)에서 $\{P_t\}$ 에 대한 자기상관계수함수(ACF)가 동일하기 때문에 이 조건으로부터 상태공간모형의 계수와 ARIMA 모형의 계수간의 관계를 식(8a), (8b), (8c)처럼 구할 수가 있다. (Joo and Jun, 1997)

$$\phi = \phi' \quad (8a)$$

$$\rho = -\frac{(\phi - \theta)(1 - \phi\theta)}{(1 + \phi)(1 - \theta)^2} \lambda^{1/2} - \frac{1}{1 + \phi} \lambda^{1/2} \quad (8b)$$

$$\sigma_w^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1 - \phi)^2} \quad (8c)$$

식(7a)에 의하여 $\phi = \phi'$ 이므로 식(7b), (7c)에서도 편의상 ϕ' 대신 ϕ 로 표현하기로 한다.

2. 상태 벡터 오차항들의 독립성 문제

Joo and Jun(1997)은 상태공간모형을 이용한 ARIMA(1,1,1) 과정을 따르는 거시 경제 변수의 추세(Trend)와 단기 변동(Cycle)을 분리하는 문제에 있어서 기존의 연구에서 상태 벡터들 사이의 오차항에 대하여 독립성을 가정하는데 대한 문제점을 수리적으로 증명하고, 나아가 이들 오차항의 가정에 대한 정확한 기준을 제시

하였다.

식(1b)의 오차항의 '분산-공분산 행렬'의 '비음 조건'에 의해서 상태공간모형의 모수 값의 공간이 제약을 받게 되는데 이는 다음과 같다.

$$-1 \leq \rho = -\frac{(\phi - \theta)(1 - \phi\theta)}{(1 + \phi)(1 - \theta)^2} \lambda^{1/2} - \frac{1}{1 + \phi} \lambda^{1/2} \leq 1 \quad (9)$$

오차항들 사이에 독립성을 가정하지 않을 때는 식(9)를 만족하는 수많은 ϕ, θ 가 존재할 수 있다. 하지만 오차항들 사이에 독립성을 가정하게 되면 매우 제한적인 ϕ, θ 의 공간에서만 모수값이 추정된다. 독립을 가정하게 되면 식(8b)에서 ρ 는 '0'이 된다. 그런 경우 λ 에 대해서 정리하게 되면 아래와 같이 된다.

$$\lambda = -\frac{(\phi - \theta)(1 - \phi\theta)}{(1 - \theta)^2} \quad (10)$$

그런데 λ 는 분산의 비율이므로 항상 양의 값을 가지게 된다. 그러므로 ϕ, θ 의 영역은 다음과 같이 제약된다.

$$\phi \leq \theta \quad (11)$$

그러므로 관측된 시계열 자료에 대해서 ARIMA(1,1,1) 과정으로 추정을 했을 때 MA계수인 θ 가 AR계수인 ϕ 보다 크거나 같을 때에만 상태공간 모형을 수립할 때 상태 방정식의 두 오차항의 관계를 독립이라고 가정할 수 있다. 따라서 주어진 시계열 자료에 대해서 상태공간 모형으로 분석하기 위해서는 우선 자료에 대해서 ARIMA 추정을 해야한다. 그리고 추정된 ARIMA 모형과 동일한 상태공간모형을 구성해서 추정해야 하며, 특히 상태공간모형의 구성을 하는데 있어서 상태 벡터들의 오차항에 대한 가정은 ARIMA 추정의 결과로 나오는 모수값의 관계에 따라 달라진다. (Joo and Jun, 1997)

IV. 상태공간모형에서의 자기회귀계수

1. 상관관계를 고려한 경우의 자기회귀계수

앞의 [II-2]에서 $\beta(T)$ 를 식(6)처럼 상태공간모형의 모수로 표현하였다. 하지만 우리는 식(8b)에서 ρ 와 λ 의 관계를 알 수 있기 때문에 식(6)을 ARIMA과정의 모수로 표현할 수가 있다. 식(6)에 식(8b)를 대입하게 되면,

$$\beta(T) = \frac{(1 - \phi^T) \left\{ \frac{(\phi - \theta)(1 - \phi\theta)}{(1 - \theta)^2} \right\}}{T \cdot \left(\frac{1 - \phi^2}{1 - \phi^T} \right) + 2 \left\{ \frac{(\phi - \theta)(1 - \phi\theta)}{(1 - \theta)^2} \right\}} \quad (12)$$

위와 같이 $\beta(T)$ 는 ARIMA과정의 모수 ϕ, θ 로만 표현이 가능하다. 분자, 분모의 계수들을 살펴보면, 자기회귀계수 $\beta(T)$ 의 부호는

$(\phi - \theta)$ 의 부호에 의해서 결정됨을 알 수 있다. 안정성 조건에 의해서 $|\phi| < 1$ 이고, 가역성 조건에 의해서 $|\theta| < 1$ 이다. 오차항의 독립을 가정한 경우에는 모수가 식(11) $\phi \leq \theta$ 의 범위에서만 나타나기 때문에 식(12)에서 항상 분자는 음, 분모는 양이 되어 자기회귀계수 $\beta(T)$ 의 부호는 항상 음의 값을 가지게 된다. 즉 $\beta(T)$ 는 T가 짧을 때에는 수익률의 음의 상관관계를 표현하다가 T가 증가함에 따라 분모가 계속 증가하므로 점점 0으로 수렴하는 모습을 보여 준다.

ARIMA과정의 계수가 상태공간모형에서 독립을 가정할 경우 표현할 수 있는 $\phi > \theta$ 인 영역으로 추정될 경우에는 $\beta(T)$ 의 분자는 항상 양의 값을 가지게 되고, 분모는 T가 길어지면 결국 양의 값을 가지게 된다. 분모의 부호는 (a)와 (b)의 상대적 크기에 의하여 결정되는 데 두 번째 항은 상수인 반면에, 첫 번째 항은 T가 증가함에 따라 계속 증가하므로 결국에는 양의 값을 가지게 된다. 즉 $\phi > \theta$ 인 영역에 있을 때는 $\beta(T)$ 가 결국에는 양의 값을 보여주다가 0으로 수렴하는 모습을 보여준다. 그러므로 상태공간모형에서 자기회귀계수가 음의 상관관계를 설명하게 된 것은 애초에 오차항간의 독립을 가정하였기 때문에 비롯된 결과이다.

V. 실증 분석

1. ARIMA 추정 및 적합성 검사

F&F(1988)는 CRSP(the Center for Research in Security Prices)에서 나온 1926-85년에 걸친 모든 NYSE 주식들에 대한 1개월 수익률 자료에 대해서 검증을 하였다. 자기회귀 분석을 실시한 결과 수익률의 U패턴을 관측할 수 있었다. 10분위 포트폴리오를 구성하여 연속 복리수익률을 계산하여 살펴보았다. 우리는 F&F가 제시한 모델을 검증하기 위해 1926년 7월부터 1985년 12월까지의 10분위 포트폴리오의 월간수익률 자료를 이용하여 분석을 하였다.

우선 실제 주가가 ARIMA(1,1,1)과정을 따르는지 검증해보았다. 획득한 데이터는 수익률의 데이터이므로 한번 차분된 데이터이다. 그래서 데이터가 ARMA(1,1)과정을 따르는지 검증해보았다. 10개의 10분위 포트폴리오에 대해서 ARIMA 추정을 해본 결과 AR, MA 계수는 동시에 90% 신뢰수준에서도 유의하지 않게 나타났다. 오히려 AR, MA 계수를 따로 추정할 때에는 99%신뢰수준에서도 유의하게 나타났다. 즉 ARMA(1,1)에 대해서는 계수가 모두 유의하지 않게 추정된 반면에 ARMA(1,0), ARMA(0,1)은 유의하게 추정되었다. 비록 유의하진 않지만 ARIMA(1,1,1) 과정에 대해서 계수를 추정해보면 [표 1]과 같이 나타난다.

[표 1] 1926-1985년 ARIMA(1,1,1) 추정

ARIMA(1,1,1) : $(1 - \phi B)(1 - B)P_t = (1 - \theta B)\epsilon_t$		
	ϕ	θ
decile1	0.139123	-0.092735
decile2	0.212199	-0.014407
decile3	0.161319	-0.079412
decile4	0.183983	-0.030582
decile5	0.180204	-0.024952
decile6	0.13868	-0.060412
decile7	0.220657	0.049918
decile8	0.149601	-0.004477
decile9	0.125365	-0.019964
decile10	0.109951	-0.001664
90%수준에서 모두 비유의		

모든 포트폴리오에서 $\phi > \theta$ 인 영역으로 AR, MA 계수가 추정이 된다. 오차항의 독립성을 가정한 경우의 상태공간모형은 $\phi \leq \theta$ 인 영역에 대해서만 정확한 표현이 가능하다. 하지만 실제 추정된 계수영역은 오차항의 상관관계가 존재해야만 나타날 수 있는 영역이므로 적절한 상태공간모형을 수립하기 위해서는 반드시 오차항의 상관관계를 고려해 주어야 한다.

모든 포트폴리오에 대해서 ARIMA(1,1,0)와 ARIMA(0,1,1)은 유의하게 추정되었다. ARIMA(1,1,1), ARIMA(1,1,0), ARIMA(0,1,1)의 세 개의 후보를 대상으로 적합성 검사(diagnostic checking)를 실시하였다. 일반적으로 ARIMA 모형의 적합성 검사에 이용되는 AIC(Akaike Information Criterion), BSC(Bayesian Schwartz Criterion)를 비교하여 적합한 모델을 선정하였다. AIC, BSC가 낮은 값을 가질수록 모형의 적합성이 높다고 할 수 있으므로, 각 기준에 대하여 구한 수치와 그에 따른 선정모형은 다음의 [표 2]와 같다.

[표 2] 적합성 비교 및 모델 선정

	기준	ARIMA(1,1,1)	ARIMA(1,1,0)	ARIMA(0,1,1)	선정 모델
decile 1	AIC	7.671157	7.669061	7.668459	ARIMA(0,1,1)
	BSC	7.683975	7.67547	7.674861	
decile 2	AIC	7.383782	7.38099	7.381909	ARIMA(1,1,0)
	BSC	7.3966	7.387398	7.388311	
decile 3	AIC	7.134893	7.132693	7.132903	ARIMA(1,1,0)
	BSC	7.147711	7.139102	7.139305	
decile 4	AIC	7.000435	6.997699	6.998493	ARIMA(1,1,0)
	BSC	7.013253	7.004108	7.004895	
decile 5	AIC	6.93409	6.931337	6.932279	ARIMA(1,1,0)
	BSC	6.946908	6.937746	6.938681	

decile 6	AIC	6.841768	6.839235	6.838928	ARIMA(0,1,1)
	BSC	6.854585	6.845644	6.84533	
decile 7	AIC	6.741433	6.738783	6.740031	ARIMA(1,1,0)
	BSC	6.754251	6.745192	6.746432	
decile 8	AIC	6.615746	6.612942	6.612764	ARIMA(0,1,1)
	BSC	6.628563	6.619351	6.619166	
decile 9	AIC	6.546407	6.543624	6.543426	ARIMA(0,1,1)
	BSC	6.559225	6.550033	6.549828	
decile 10	AIC	6.209658	6.206853	6.206273	ARIMA(0,1,1)
	BSC	6.222475	6.213261	6.212675	

decile 1,6,8,9,10 포트폴리오는 ARIMA(0,1,1), decile 2,3,4,5,7은 ARIMA(1,1,0)이 가장 적합한 모델인 것으로 나타났다. 이와 같이 모든 10분위 포트폴리오는 가장 적합한 모델로 ARIMA(1,1,0) 또는 ARIMA(0,1,1)이 선정되었다. 안정적인 부분으로 AR(1)을 가정한 모형, 즉 ARIMA(1,1,1)을 따르는 모형은 실제 주가를 충분히 설명하기에는 적절하지가 않다.

2. ARIMA(0,1,1), ARIMA(1,1,0)를 따르는 상태공간모형

2.1. 자기회귀계수

앞에서 우리는 ARIMA(1,1,1)을 따르는 상태공간모형의 자기회귀계수를 유도하였다. 마찬가지로 유의하게 추정된 ARIMA(1,1,0), ARIMA(0,1,1)을 따르는 상태공간모형의 자기회귀계수의 행태를 살펴볼 필요가 있다. 이들을 유도하는 것은 어렵지가 않다. 왜냐하면 이미 앞장에서 우리는 ARIMA(1,1,1)을 따르는 상태공간모형의 자기회귀계수를 유도하였다. ARIMA(1,1,1)을 따르는 모형에서 $\phi=0$ 인 경우가 바로 ARIMA(0,1,1)이고, $\theta=0$ 인 경우가 바로 ARIMA(1,1,0)이기 때문이다. 식(11)에서 각각 $\phi=0$, $\theta=0$ 을 대입하면 쉽게 유도할 수가 있다.

ARIMA(0,1,1)을 따르는 경우, ($\phi=0$)

$$\beta(T) = \frac{-\left(\frac{\theta}{(1-\theta)^2}\right)}{T+2\left(\frac{\theta}{(1-\theta)^2}\right)} \quad (14)$$

ARIMA(1,1,0)을 따르는 경우, ($\theta=0$)

$$\beta(T) = \frac{(1-\phi^T)\phi}{T \cdot \left(\frac{1-\phi^2}{1-\phi^T}\right) - 2\phi} \quad (15)$$

2.2 오차항의 독립을 가정하는 경우 제약되는 모수의 공간

앞의 [III-2]절에서 보인 것처럼 상태공간모형에서 오차항의 독립을 가정할 경우에는 ARIMA과정의 모수의 공간이 제약된다. ARIMA(1,1,1)에서 모수가 $\phi \leq \theta$ 로 제약된 것처럼

ARIMA(0,1,1), ARIMA(1,1,0)에서도 모수의 공간이 제약된다. 같은 방식으로 유도하면 ARIMA(0,1,1)에서는 $\theta \geq 0$, ARIMA(1,1,0)에서는 $\phi \leq 0$ 로 모수의 공간이 제약된다.

[표 2] 오차항이 서로 독립인 경우 제약되는 모수의 범위

ARIMA(1,1,1)	ARIMA(0,1,1)	ARIMA(1,1,0)
$\phi \leq \theta$	$\theta \geq 0$	$\phi \leq 0$

2.3 ARIMA(1,1,0), ARIMA(0,1,1)에 대한 계수 추정

ARIMA(1,1,0), ARIMA(0,1,1)에 대해서 계수를 추정하면 [표 3]과 같이 나타났다. ARIMA(1,1,0)의 모든 계수는 $\phi > 0$ 인 영역으로, ARIMA(0,1,1)의 모든 계수는 $\theta < 0$ 인 영역으로 추정되었다. 앞의 ARIMA(1,1,1)의 추정과 마찬가지로 추정된 계수영역은 오차항의 상관관계가 존재해야만 나타날 수 있는 영역이다.

[표 3] 1926-85년 ARIMA(1,1,0), ARIMA(0,1,1) 추정

	ARIMA(1,1,0) $(1-\phi B)(1-B)P_t = \epsilon_t$	ARIMA(0,1,1) $(1-B)P_t = (1-\theta B)\epsilon_t$
	ϕ	θ
decile1	0.226498	-0.220666
decile2	0.198346	-0.186583
decile3	0.235767	-0.226559
decile4	0.213094	-0.202409
decile5	0.204057	-0.190414
decile6	0.196373	-0.188829
decile7	0.172003	-0.155368
decile8	0.153969	-0.144979
decile9	0.144854	-0.137393
decile10	0.111586	-0.107651
	99%수준에서 모두 유의	

* 음영 표시된 부분이 적합력이 더 높은 모형임.

3. 자기회귀계수와 오차항의 독립성의 관계

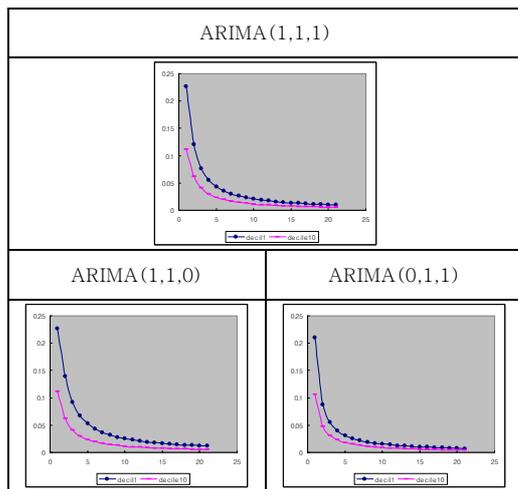
ARIMA(1,1,1), ARIMA(0,1,1), ARIMA(1,1,0) 과정을 따를 때, 각각의 과정에 대하여 유도된 자기회귀계수와 계수의 부호를 결정하는 영역은 아래의 [표 4]와 같다.

[표 4] 모형별 자기회귀계수와 부호를 결정하는 영역

	ARIMA(1,1,1)	ARIMA(0,1,1)	ARIMA(1,1,0)
자기회귀			
계수	$\beta(T) = \frac{(1-\phi^T)\phi}{T \cdot \left(\frac{1-\phi^2}{1-\phi^T}\right) - 2\phi}$	$\beta(T) = \frac{-\left(\frac{\theta}{(1-\theta)^2}\right)}{T+2\left(\frac{\theta}{(1-\theta)^2}\right)}$	$\beta(T) = \frac{(1-\phi^T)\phi}{T \cdot \left(\frac{1-\phi^2}{1-\phi^T}\right) - 2\phi}$
양(+)	$\phi \geq \theta$	$\theta \leq 0$	$\phi \geq 0$
음(-)	$\phi < \theta$	$\theta > 0$	$\phi < 0$

[표 2]와 [표 4]를 보면 독립을 가정함으로써 제한된 모수의 영역과 자기회귀계수를 음(-)으로 만드는 영역이 일치함을 알 수 있다. 즉 ARIMA(1,1,1), ARIMA(0,1,1), ARIMA(1,1,0) 과정을 따르는 상태공간모형에서 유도된 자기회귀계수는 오차항이 서로 독립이라는 가정하에서는 음의 값을 가질 수 밖에 없게 된다. 그리고 [표 1], [표 3]을 보면 추정된 모수들의 영역은 모두 오차항의 상관관계가 존재해야만 상태공간모형으로 표현할 수 있는 영역으로서 자기회귀계수를 결국 양(+)으로 만드는 영역에 해당된다. 즉 오차항의 상관관계를 고려하여 수립한 상태공간모형에서 유도된 자기회귀계수는 실제 데이터에 근거하여 볼 때 음(-)이 아니라 오히려 양(+)의 값을 표현한다. [표 1],[표 3]으로부터 실제 데이터에서 추정된 계수 값에 근거해서 ARIMA(1,1,1), (1,1,0), (0,1,1) 각 모형 별로 decile 1과 decile 10 포트폴리오의 자기회귀계수를 그려보면 다음의 [표 5]와 같다.

[표 5] 추정된 계수에 근거한 decile 1, 10의 자기회귀계수



F&F(1988)가 수익률의 U자형 패턴과 음의 상관관계를 표현하기 위하여 제시하였던 상태공간모형은 실제 데이터에 근거하여 볼 때 U자형 패턴을 보여주지 않을 뿐만 아니라 오히려 양의 상관관계를 표현하고 있다. 애초에 F&F가 의도하였던 수익률의 음의 상관관계는 현실을 고려하지 않은 무리한 가정에 의해서 유도된 것이다. 그러므로 음의 상관관계를 보이다 결국에는 상관관계가 0으로 복귀하는 장기의 주식수익률의 평균회귀현상을 F&F(1998)가 제시한 상태공간모형은 실제 데이터에 근거하여 적절하게 설명해주지 못한다.

VI. 결론

기존의 연구에서는 AR(1)의 안정적인 부분과 I(1)의 영구적인 부분의 합으로 이루어진 상태공간모형을 제시하여 장기에 나타나는 포트폴리오 수익률의 평균회귀현상을 설명하였다. 하지만 상태공간모형을 이용할 때 논리 전개의 편의

성을 생각하여 오차항간의 상관관계를 고려하지 않고 진행하는 경우가 많다. 오차항의 상관관계를 적절하게 고려하지 않은 경우에는 모수의 영역이 제한되어 장기적인 추세와 단기변동을 분리하는 경우 오류가 발생한다.

우리는 이번 연구에서 주가 시계열에 대해서 ARIMA(1,1,1), (1,1,0), (0,1,1)의 세가지 모형에 대해서 계수를 추정하였다. 추정된 계수의 영역을 보면 모든 경우에 오차항의 상관관계를 고려해야만 한다. F&F가 제시한 모형처럼 오차항의 상관관계를 고려하지 않은 경우에는 가정분리가 되어서 추정된 계수를 믿을 수가 없다. 그래서 우리는 오차항의 상관관계를 고려한 자기회귀계수를 유도하였다. 이렇게 유도된 자기회귀계수의 부호를 결정하는 영역과 오차항의 가정에 의하여 제한되는 모수의 영역이 밀접한 관련이 있음을 발견하였다. 실제 데이터에 근거한 자기회귀계수는 모두 양의 부호만을 가질 수 있을 뿐, 절대 음의 부호를 가질 수가 없게 된다. 그러므로 장기의 주식수익률의 음의 상관관계를 표현하기 위하여 제시하였던 기존의 상태공간모형은 실제 데이터에 근거할 경우 오히려 반대로 양의 상관관계를 표현하는 현상이 발생한다.

1년이 넘는 기간에 대해 주식수익률에 음의 상관관계가 존재하고 (F&F(1988), Poterba & Summers(1988)), 짧은 기간(일간,주간,월간)에 대해선 양의 상관관계가 존재한다는 연구가 있다(Lo & MacKinlay (1988), Poterba & Summers (1988)). Lo & MacKinlay(1988), Khil & Lee(2002)는 AR(1)을 안정적인 부분으로 가진 평균회귀모형은 장기적인 현상을 표현하는 데만 적합할 뿐 단기의 양의 상관관계를 나타내는 데는 적절하지가 않다고 지적하였다. 하지만 우리의 연구결과에 의하면 AR(1)을 가정한 모형은 오차항의 상관관계를 고려할 경우 오히려 단기의 양의 상관관계를 나타내는데 적합하게 나타난다.

이번 연구의 초점은 평균회귀현상을 연구할 때 상태공간모형 도입의 적절성을 살펴보는 데 있었다. 그 결과 상태공간모형에서 오차항의 상관관계가 자기회귀계수에 중요한 영향을 끼칠 수 있음을 보았다. 충격들간의 상관관계는 항상 일정한 것이 아니라 시간에 따른 변화가 예상된다. 시간에 따른 충격들간의 상관관계 분석을 기반으로 실제 장단기 주가의 현상을 적절하게 설명하는 모형의 수립은 추후의 연구과제로 남겨둔다.

References

Clark, P. K., "The Cyclical Component of U.S. Economic Activity." *Quarterly Journal of Economics*, 797-814, 1987.

- Fama, Eugene G., and French, Kenneth R., "Permanent and Temporary Components of Stock Prices." *Journal of Political Economy*, Vol. 96, No. 2, 246-273, 1988
- Joo, Young Jin, and Jun, Duk Bin, "State Space Trend-cycle Decomposition of the ARIMA(1,1,1) Process." *Journal of Forecasting*, vol. 16, 411-424, 1997
- Khil, J., and Lee, B., "A Time-Series Model of Stock Returns with a Positive Short-Term Correlation and a Negative Long-Term Correlation." *Review of Quantitative Finance and Accounting*, Vol. 18, 381-404, 2002.
- Lo, A. and C. MacKinlay, "Stock Market Prices Do Not Follow Random Walks: Evidence from a Simple Specification Test." *Review of Financial Studies* 1, 41-66, (1988).
- Poterba, James M., and Summers, Lawrence H., "Mean Reversion in Stock Prices." *Journal of Financial Economics*, Vol. 22, 27-59, 1988.
- Summers, Lawrence H., "Does the Stock Market Rationally reflect Fundamental Values?" *Journal of Finance*, Vol. 43, 639-655, 1988
- Watson, M. W., "Univariate Detrending Methods with Stochastic Trends", *Journal of Monetary Economics*, Vol. 18, 49-75, 1986.