

---

# 2차원의 달 진입 최적 궤적 설계.

## 2-Dimension, Optimal Lunar Capture Trajectories Design.

이동현\*, 최윤혁, 방효충(한국과학기술원)

---

### 1. 서론

본 논문에서는 달 진입 궤도에 있어 두 좌표계를 적용하여 최적화하는 기법을 연구하였다. 목적함수로는 소비 연료의 에너지 레벨로 선정하였으며 최종시간에서의 경계 조건은 달에 대한 원궤도로 설정하였다.

많은 논문에서 저추력을 이용한, 지구-달 또는 행성간 임무 궤적 설계에 대하여 다루었다. Pierson 과 Kluever 는 참고문헌[1]에서 3 단계 접근법을 고안하여, 지구에서 달까지의 2 차원 궤적을 최적화하였다. 여기에서 지구 탈출 및 달 진입 단계에서 추력의 크기를 일정하게 설정하였고, 지구-달 천이 궤도는 추력이 없는 시스템을 고려하였으며, 추력 사용시간이 최소가 되도록 목적함수를 설정하였다. 위 3 단계 접근법을 확장하여 Kluever 는 참고문헌[2]에서 3 차원 지구-달 최적 궤적을 설계하였다. Pierson 과 Kluever 참고문헌[3]과 [4]에서 Nuclear electric propulsion 시스템을 탑재한 우주비행체에 대하여 최적의 지구-달 천이궤적을 설계하였다. 참고문헌[4]에서도 지구 탈출 궤도와 달 진입 궤도 사이에 추력을 이용하지 않은 궤적을 가정하였으며, 위 논문에서는 3 차원 시스템에 대한, 좌표계 변화시에 코스테이츠의 변환식에 대하여 소개하고 있다. Kluever 는 참고문헌[5]에서 추력이 큰 화학식 추력기와 저추력기를 결합하여, 지구 탈출시에는 화학 추력기를 적용하고, 달 진입단계에서는 저추력기를 이용한 문제를 다루었다. 한편, Golan 과 Breakwell 은 참고문헌 [6]에서 2 체(2 body)운동 방정식을 접목시켜 지구-달 궤적을 최적화하였다.

또한 참고문헌 [7],[8]에서는 저추력을 이용

한 지구-화성 탐사 임무의 궤적을 최적화 하였다. 위 논문에서는 여러 단계에 걸쳐서 오랜 시간에 걸친 지구 탈출 궤적과 화성 진입 궤적을 순방향, 역방향 적분을 통하여 경계 조건을 만족하는 최적화 궤적을 설계하였다. 2 체문제에 대한 지구 탈출, 달 진입단계의 궤적 최적화는 참고문헌 [9],[10]에서 나타나 있다. 저추력을 이용한 지구 탈출 문제는 천이 시간이 길고, 지구 공전 시간이 매우 길기 때문에 초기 코스테이츠 값을 추정하기가 매우 어렵다. 이를 참고문헌 [9]에서는 ACT(Adjoint Control Transformation)기법과 Costate Estimator 기법을 적용하여 해를 구하였으며, 참고문헌 [10]에서는 연속적 최적화 기법을 적용하여 문제의 해를 구하였다. 한편, 위에 언급한 참고문헌은 최적화 이론의 간접적 방법을 적용하여, 문제를 2PBVP 으로 구성하고, 이를 SQP 또는 Shooting Method 를 적용하여, 문제의 해를 구하였다. 직접적인 방법을 적용하여 행성간 임무 궤적을 설계한 논문으로는 Conway 의 논문이 있다[11]. 위 논문에서는 상태변수와 입력을 매개 변수로 설정하여, SQP 틀을 적용하여 문제의 해를 구하였다.

본 논문에서는 참고문헌 [1]의 운동방정식을 적용하였으며, 지구/달 중심의 회전좌표계, 제한된 3 체 원형 운동방정식을 고려하였다. 최적화 방법의 간접적 방법을 적용하였으며, 코스테이츠의 초기값의 민감도 문제를, 연속적 방법[10]을 확장하여 적용하였다. 다음절에서는 최적화 문제정의와 문제 해결방법, 그리고 두 시스템에 대한 상태변수와 코스테이츠의 좌표변환에 대하여 언급하였다.

## 2. 문제 정의

2 차원의 달 천이/진입의 궤도 설계는 지구 및 달 중심의 회전좌표계를 이용하고, 지구-달-우주 비행체의 3 체를 고려한 제한된 3 체 원형 운동 방정식을 적용하였다.[1] 본 논문에서는 참고문헌[1]과 다르게 추력기의 불연속성을 가정하지 않았으며, 추력의 크기는 가변이 가능하다고 설정하였다. 목적함수로서는 식(1)과 같이 추력 크기의 제곱의 합으로 설정하였으며, 이는 연료소비의 에너지 레벨을 최소화하는 것이 목적이 되겠다.

$$J = \nu^T G(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} U^2 dt$$

$$G(t_f, x_m(t_f)) = \left\| \begin{array}{c} (r_m - r_m) \\ (v_m - 0) \\ v_{\theta m} - \sqrt{\mu/r_m} - \omega r_m \end{array} \right\|_{t=t_f} \quad (1)$$

여기에서  $r_m, v_{rm}, v_{\theta m}, \omega$  은 각각, 달 중심에 대한 거리, 속도 성분 그리고 달이 지구를 공전하는 각속도를 나타낸다. 상태 변수의 초기값은 물리적으로 고도가 특정 반경에 대한 원 궤도로 설정하였다.

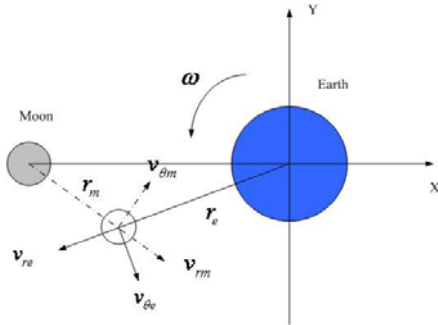


그림 1. 시스템 운동 방정식과 상태 변수.

### 2.1 TPBVP(Two Point Boundary Value Problem)

운동방정식과 최적화 이론을 적용한 코스테이즈의 운동방정식, 그리고 코스테이즈의 종말 조건은 참고문헌[1],[2]을 참조하여 식(2)와 같이 유도할 수 있다.

$$\lambda_{rm}(t_f) = \nu_r r_m(t_f) \quad (2.a)$$

$$\lambda_{vr}(t_f) = \nu_{vr} v_{rm}(t_f) \quad (2.b)$$

$$\lambda_{v\theta m}(t_f) = \nu_{v\theta} v_{\theta m}(t_f) \quad (2.c)$$

$$\lambda_{\theta m}(t_f) = 0 \quad (2.d)$$

한편, 최적 조건(Optimality Condition)은 다음 식

(3)와 같이 유도할 수 있다.

$$\sin(\alpha) = \frac{-\lambda_{vr}}{\sqrt{\lambda_{vr}^2 + \lambda_{v\theta}^2}} \quad (3.a)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{-\lambda_{v\theta}}{\sqrt{\lambda_{vr}^2 + \lambda_{v\theta}^2}} \quad (3.b)$$

$$u = \frac{T_{\max}}{2m} \left( \sqrt{\lambda_{vr}^2 + \lambda_{v\theta}^2} \right) \quad (3.c)$$

따라서 본 최적화 문제는 초기 코스테이즈의 값을 설정하여, 상태변수와 코스테이즈의 운동방정식, 그리고 최적 조건 식(3)을 주어진 시간 적분을 수행한 후, 최종 시간에서 경계 조건(1),(2)를 만족해야 하는 TPBVP 으로 고려할 수 있다. 이 과정에서 달 중심으로부터 66,000km 이내에서는 달 중심 회전 좌표계를 이용하여 적분을 전-방향 적분(Forward Integration)을 수행하고, 그 외에는 지구 중심 회전 좌표계를 기준으로 전-방향 적분을 수행하여야 한다. 위 과정에서 상태변수와 코스테이즈의 좌표 변환이 필요하다.

### 2.2 지구/달 시스템의 좌표 변환

참고 문헌[2]에서는 상태변수에 대한 지구 중심 좌표계로부터 달 중심의 좌표계로 변화하는 식이 나타나 있다. 먼저 지구 중심의 회전 좌표계에 대한 상태 변수에 대한 Cartesian 좌표계로 변환하는 식은 다음과 같다[2]. Cartesian 좌표계의 정의는 그림 1.과 같이 달에서부터 지구를 잇는 직선을 x 축으로 정의하고, 지구-달 궤도 평면을 z, 그리고 x 축과 z 축에 대한 직교 성분을 y 축으로 설정하였다.

$$x = r_e \cos(\theta_e) - 384400 \quad (4.a)$$

$$y = r_e \sin(\theta_e) \quad (4.b)$$

$$\dot{x} = v_{re} \cos(\theta_e) - v_{\theta e} \sin(\theta_e) \quad (4.c)$$

$$\dot{y} = v_{re} \sin(\theta_e) + v_{\theta e} \cos(\theta_e) \quad (4.d)$$

한편, Cartesian 좌표계로부터 달 중심의 회전 좌표계 상태 변수로 변환하는 관계식은 다음과 같다.[2]

$$r_m = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad (5.a)$$

$$\theta_m = \tan(y/x) \quad (5.b)$$

$$v_{rm} = \dot{x} \cos(\theta_m) + \dot{y} \sin(\theta_m) \quad (5.c)$$

$$v_{\theta m} = -\dot{x} \sin(\theta_m) + \dot{y} \cos(\theta_m) \quad (5.d)$$

위 식(4),(5)에서 첨자 e,m 은 각각 지구/달 중심

을 의미한다. 한편, 코스테이즈의 좌표변환은 제어 입력의 크기와 변화가 Cartesian 좌표계로 변환하였을 경우 같다는 조건을 이용한다.[7][9]

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \lambda_{vx} \\ \lambda_{vy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda_{vre} \cos(\theta_e) - \lambda_{v\theta e} \sin(\theta_e) \\ \lambda_{vre} \sin(\theta_e) + \lambda_{v\theta e} \cos(\theta_e) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_{vrm} \cos(\theta_m) - \lambda_{v\theta m} \sin(\theta_m) \\ \lambda_{vrm} \sin(\theta_m) + \lambda_{v\theta m} \cos(\theta_m) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &[D(\theta_e)] \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{vre} \\ \dot{\lambda}_{v\theta e} \end{bmatrix} + \dot{\theta}_e [D(\theta_e)] \begin{bmatrix} \lambda_{vre} \\ \lambda_{v\theta e} \end{bmatrix} \\ &= [D(\theta_m)] \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{vrm} \\ \dot{\lambda}_{v\theta m} \end{bmatrix} + \dot{\theta}_m [D(\theta_m)] \begin{bmatrix} \lambda_{vrm} \\ \lambda_{v\theta m} \end{bmatrix} \\ D(\theta_e) &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_e) & -\sin(\theta_e) \\ \sin(\theta_e) & \cos(\theta_e) \end{bmatrix} \\ \dot{D}(\theta_e) &= \begin{bmatrix} -\sin(\theta_e) & -\cos(\theta_e) \\ \cos(\theta_e) & -\sin(\theta_e) \end{bmatrix} \\ D(\theta_m) &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_m) & -\sin(\theta_m) \\ \sin(\theta_m) & \cos(\theta_m) \end{bmatrix} \\ \dot{D}(\theta_m) &= \begin{bmatrix} -\sin(\theta_m) & -\cos(\theta_m) \\ \cos(\theta_m) & -\sin(\theta_m) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

위 식(6)으로부터  $\lambda_{vre}, \lambda_{v\theta e}$  와  $\lambda_{vrm}, \lambda_{v\theta m}$  의 좌표변환이 가능하며, 식(7)로부터  $\lambda_{re}, \lambda_{\theta e}$  와  $\lambda_{rm}, \lambda_{\theta m}$  의 좌표변환이 가능하다. 한편, 위 코스테이즈의 작은 변화에도 궤적이 민감하므로 소수점 15 자리까지 계산에 이용되었다.

### 3. TPBVP의 수치적 해법

본 논문에서 적용된 수치적 방법은 기본적으로 Shooting Method 이다. 초기 코스테이즈 값을 추측하여 적분을 수행한 후, 종말 시간에서의 경계 조건의 기울기에 비례하게 초기 코스테이즈 값을 업데이트한다. 이 과정에서 민감도 문제 때문에 초기 문제를 간단하게 설정하고, 이를 바탕으로 복잡한 문제로 확장시켜 나간다. 이전에 설정된 문제의 해를, 다음 문제의 해의 초기값으로 설정하여 해를 구하는 내용이다. 자세한 적용 방법이나 구현 방법은 참고문헌[10]에 잘 나타나 있다.

### 4. 수치적 기법을 적용한 최적 궤적 설계

본 논문에서 참고문헌 [10]의 연속적 최적화 방법을 적용하기 위하여, 기본 해로 적용한 문제는 지구 중심 좌표계에서 반경 150,000km 의 원궤도로 설정하고, 최종 시간에서 경계 조건은 달 중심 좌표계에서는 반경이 20,000km 의 원궤도로 설정하였다. 지구부터 달의 작용구면(SOI, Sphere of Influence)까지는 지구 중심좌표계로 정의된 운동방정식으로 적분을 수행하고, 달의 작용구면부터 달까지는 달 중심좌표계로 정의된 운동 방정식을 적용하여 적분을 수행한다. 궤도 천이 시간은 3.6 일로 설정하였다. 그림 2.에서는 위 경계 조건을 만족하는 최적 궤적의 설계 결과이다. 여기서 설정한 위치 각도는 지구 중심에서 110 도이며, 달에서는 자유 변수(Free State)로 설정하였다. 천이 궤도 상에서 추력은 연속적으로 사용한다. 제어 입력 크기 결과를 보면 그림 3 과 같다. 궤도 공전을 수반하지 않고, 직접적으로 진입한 결과로, 입력 크기의 진동이 없는 것을 볼 수 있다. 한편, 위 찾아진 해를 이용하여, 종말시간에서 경계조건을 변화시킨 후 이전의 코스테이즈 초기값으로 설정하고, 최적해를 연속적으로 구한다.

### 5. 결론

본 논문에서는 2 차원의 에너지 최적의 달궤도 천이 및 달 진입 궤적을 설계하였다. 저추력을 이용한 궤도 천이는 천이 시간이 매우 길어서, 간접적 방법을 이용할 경우 문제의 해를 찾기가 어렵다. 또한 지구 탈출 후, 달 진입까지의 운동 방정식은 두 좌표계가 변환해서 설계하여야 정밀한 최적 궤적을 설계할 수 있다. 위 문제를 해결하기 위하여 코스테이즈의 변환식과 연속적 최적 최적화 기법을 적용하였다. 설계의 기초가 되는 궤적으로는 150,000km 의 지구 원궤도와 20,000km 의 달 원궤도로부터 천이 궤도를 설계하였으며, 위 궤도를 기본으로 종말 시간에서의 달 원궤도 크기를 줄여 나가면서, 최적화를 수행하였다. 이를 바탕으로 최적의 달 천이/달 진입 궤적을 설계할 수 있었으며, 종말 시간의 달에 대한 반경에 따라 코스테이즈의 변화 경향을 알 수 있었다. 속도에 대한 코스테이즈의 최종 시간에서의 값은 최종 각 위치와 관련하여 진동하는 결과를 볼 수 있었으며, 위 결과는 향후 지구-달의 전체 최적 설계에 바탕이 될 수 있겠다.

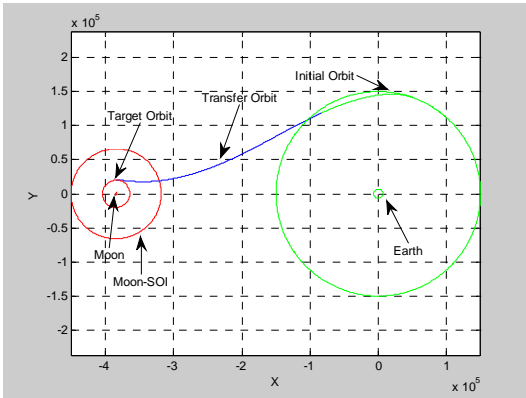


그림 2. 코스테이스 변환식을 적용하여 설계된 달 진입 궤적 설계 결과. ( $r_m(tf) = 20,000$ )

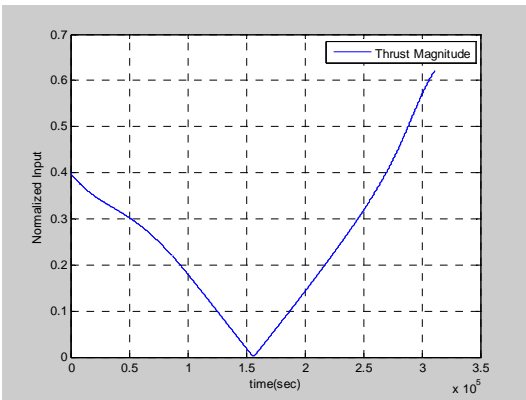


그림 3. 최적 달 진입 궤적에 대한 추력의 크기

## 6. 후기

본 연구 논문은 한국과학재단을 통해 교육과학기술부의 우주원천기술 개발사업(NSL, National Space Lab.)으로부터 지원을 받아서 수행되었습니다. (S10801000123-08A0100-12310)

## 7. 참고문헌

[1] Pierson Bion L., and Kluever Craig A., "Three-Stage Approach to Optimal Low-Thrust Earth-Moon Trajectories," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.17, No.6, 1994, pp.1275~1282.  
 [2] Kluever, Craig A. and Pierson Bion L., "Optimal Low-Thrust Three-Dimensional Earth-Moon Trajectories," Journal of

Guidance, Control, and Dynamics, Vol.18, No.4, 1995, pp.830~837.

[3] Kluever, Craig A. and Pierson Bion L., "Vehicle-and-Trajectory Optimization of Nuclear Electric Spacecraft for Lunar Mission," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.18, No.4, 1995, pp.830~837.

[4] Kluever, Craig A. and Pierson Bion L., "Optimal Earth-Moon Trajectories Using Nuclear Electric Propulsion," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.20, No.2, 1997, pp.239~245.

[5] Kluever, Craig A., "Optimal Earth-Moon Trajectories Combined Chemical-Electric Propulsion," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.20, No.2, 1997, pp.253~259.

[6] Guelman., "Earth-to-Moon Transfer with a Limited Power Engine," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.18, No.5, 1995, pp.1133~1138.

[7] Vadali S.R., Nah, R., and Braden, E., "Fuel-Optimal, Low-Thrust, Three Dimensional, Earth-Mars Trajectories," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.26, No.6, 2001, pp.1100~1107.

[8] Ranieri C.L and Ocampo C.A., "Indirect Optimization of Two-Dimensional Finite Burning Interplanetary Transfers Including Spiral Dynamics," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.31, No.3, 2008, pp.720~728.

[9] Ranieri C.L and Ocampo C.A., "Indirect Optimization of Spiral Trajectories," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.29, No.6, 2006, pp.1360~1366.

[10] Donghun Lee, and Hyochoong Bang, "Optimal Earth Escape Trajectory Using continuation method and costate estimator," 18<sup>th</sup> AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, 2008.

[11] Tang, S., and Conway, B. A., "Optimization Trajectories Using Collocation and Nonlinear Programming," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.18, No.3, 1995, pp.599~604.