상태공간모형을 이용한 이자율 확률과정의 추정

전덕빈* 정우철**

* 한국과학기술원 dbjun@kgsm.kaist.ac.kr

**삼정 KPMG woochuljung@kr.kpmg.com

Abstract

The dynamics of unobservable short rate are frequently estimated directly by using a proxy. We estimate the biases resulting from this practice ("proxy problem").

To solve this problem, State-Space models have been proposed by many researchers. State-Space models have been used to estimate the unobservable variables from the observable variables in econometrics. However, applications of State-Space models often result in a misleading interpretation of the underlying processes especially when the observability of the State-Space model and the assumption of noise processes in the state vector are not properly considered.

In this study, we propose the exact State-Space model that properly considers the faults of previous researchers to solve the proxy problem.

1. 서론

1990 년대 이자율의 시계열 속성을 검증하기 위한 많은 실증 연구 들이 있었다 (Chan *et al*, 1992; Ait-Sahalia, 1996 a, b; Anderson 과 Lund, 1997; Conley *et al.*, 1997; Stanton, 1997; Gallant, 1999 외 다수). 이들 실증 연구에서는 무위험채권 가격결정모형에 중요한 상태변수인 이자율 확률과정의 모수값을 잘 추정하여 이자율의 중요한 시계열 속성인 '추세'와 '확산'을 정확하게 이해하려 하였고, 추정 방법에는 GMM (Generalized Method of Moment)을 주로 사용해 왔으며, 최근 연구에서는 비모수적 방법과 EMM(Efficient method of moment)을 주로 사용하고 있다.

이자율 시계열의 속성을 검증하기 위해서는 '순간적인 이자율 (Instantaneous interest rate)'이 필요하지만 현실적으로 관찰할 수 없는 '비관측 변수'이므로 일반적으로 만기가 짧은 무위험채권의 수익율을 대신 사용하고 있다. (Anderson 과 Lund (1997)과 Stanton (1997)은 3 개월 만기 T-bill 수익률, Chan *et al.* (1992)은 1 개월 만기 T-bill 수익률, Ait-Sahalia (1996 a, b)는 1 주일 만기 유로 달러 수익률 사용)

위에서 열거한 많은 실증 연구들이 제시한 이자율 확률과정의 추정은 순간적인 이자율의 시계열 속성에 관한 추정이 아니라, 순간적인 이자율을 대신해 사용한 단기 채권 수익률의 시계열 속성이다. 따라서 이론 에서 가정한 순간적인 이자율 확률과정에 대한 속성, 즉 추세와 확산에 대해 왜곡된 이해를 할 수 밖에 없으며 이를 '대용변수문제(Proxy problem)'라고 정의해 왔다 (Chapman *et al.*, 1999).

본 연구에서는 이러한 대용변수문제의 해결을 위해 상태공간모형을 제시한다. 이는 관측 가능한 변수를 이용해 비관측 변수를 추정해 내는 방법이다 (Kalman, 1960; Kalman 과 Bucy, 1961). 이자율 기간구조 모형에 상태공간모형을 적용하여 현실적으로 관찰 가능한 단기 무위험채권 수익률로부터 관측 불가능한 변수인 순간적인 이자율을 추정하였다 (Duffie, 1994; Babbs 와 Nowman, 1997; Geyer 와 Pichler, 1999; Duan 과 Simonato, 1999).

2. 본론

2.1 관측 가능성 (Observability)

관측가능성이란 관측된 일련의 시계열 자료로부터 상태공간모형이 유일한 비관측 상태변수를 추정할 수 있는가의 여부를 말한다 (Aoki, 1990). 아래와 같은 일반적인 상태공간모형에서

$$Y_t = FX_t + v_t \qquad -(1a)$$
$$X_t = GX_{t-1} + w_t \qquad -(1b)$$

$\{Y_t\}$의 n 개의 연속적인 기대값에 대한 정보가 '관측가능성행렬'을 통해 최초의 상태

벡터 X_0 의 값을 유일하게 결정하기에 충분하다면, (1a), (1b)로 구성된 상태공간모형은 '관측 가능하다(observable)'고 한다. 즉, 다음과 같은 구성에서

$$\begin{bmatrix} E(Y_0) \\ E(Y_1) \\ \vdots \\ E(Y_{n-1}) \end{bmatrix} = OX_0 , \quad O = \begin{bmatrix} F' \\ F'G \\ \vdots \\ F'G^{n-1} \end{bmatrix} \qquad \text{-- (2)}$$

관측가능성행렬인 O 행렬의 위수(rank)가 상태벡터의 차원, n 과 같다면 X_0를 유일하게 추정할 수 있으며, 식(1a), (1b)로 구성되는 상태공간모형은 관측 가능하다고 한다.

2.2 가성 분리(Spurious Decomposition)

지금까지 살펴본 바와 같이 상태공간모형에서 관측가능성을 점검한 결과, 구성한 상태공간모형의 O 행렬이 특이행렬(singular matrix)인 경우 모형의 상태벡터는 관측불가능 (unobservable)하다고 하며, 이러한 상태벡터의 분리를 '가성분리(Spurious Decomposition)'라고 한다. 가성분리 문제는 기존의 상태공간모형을 이용한 이자율 확률과정 추정의 연구 에서도 나타나고 있다 (Duffie, 1994; Babbs 와 Nowman, 1998; Geyer 와 Pichler, 1999; Duan 과 Simonato, 1999). 이상의 연구에서 제시한 모형 중 Vasicek 의 단일요인모형을 상태공간모형 형태로 나타내면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha r_t + \beta + v_t \qquad \text{--- (3)} \\ r_t &= \phi r_{t-1} + \mu + w_t \\ \alpha &= \frac{1}{\tau\kappa}(1-\exp(-\kappa\tau)) \\ \beta &= \frac{1}{\tau}\frac{\sigma^2}{4\kappa}b(\tau)^2 - \frac{1}{\tau}\left(\frac{\sigma^2}{2\kappa} - \theta + \frac{\lambda\sigma}{\kappa}\right)(\tau - b(\tau)) \\ \phi &= (1-\kappa). \qquad \mu = \kappa\theta. \end{aligned}$$

이때, 식(3)에 해당하는 O 행렬은 다음과 같다.

$$O = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ \alpha\phi & \alpha & 1 \\ \alpha\phi^2 & \alpha(\phi+1) & 1 \end{bmatrix} \rightarrow |O| = 0$$

따라서 위의 모형에서 나타나는 O 행렬은 특이행렬로서 결국 기존 상태공간모형이 관측 불가능한 모형이며, 이를 이용한 상태벡터의 분리는 가성분리임을 말한다.

2.3 상태공간모형의 수립

본 연구에서는 아래와 같은 이자율 확률과정 추정을 위한 상태공간모형을 제안한다.

$$\begin{aligned} y_t &= r_t + c_t \\ r_t &= \alpha r_{t-1} + \beta + v_t \\ c_t &= \gamma c_{t-1} + w_t \\ \begin{pmatrix} v_t \\ w_t \end{pmatrix} &\sim BVN\left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}, \sigma_v^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho\lambda^{1/2} \\ \rho\lambda^{1/2} & \lambda \end{pmatrix}\right) \qquad \text{-- (4)} \\ dr_t &= \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\, dz_t \\ r_t &= (1-\kappa\Delta)r_{t-1} + \kappa\theta\Delta + v_t \qquad \text{-- (5)} \\ y_t - r_t &= c_t \qquad \text{-- (6)} \end{aligned}$$

여기서 $\{Y_t\}$는 관측 가능한 채권 수익률이며, $\{Y_t\}$를 상태공간모형을 이용하여 두 개의 상태변수 $\{r_t\}$와 $\{c_t\}$로 분리 시켰다. $\{r_t\}$는 순간적인 이자율의 확률과정으로 식(12)에서와 같이 Ornstein-Uhlenback 확률과정을 'Euler 근사법'을 이용해 이산화 시켜 AR(1) 과정으로 모형화 하였다. $\{c_t\}$는 관측 가능한 $\{Y_t\}$와 관측이 불가능한 $\{r_t\}$의 차이로서 이자율의 기간구조를 설명하는 부분이다.

상태방정식의 오차항, $\{v_t\}$, $\{w_t\}$에 대한 가정은 일반적인 가정과 다르게, 오차항의 독립 가정이 상태공간모형의 모수 추정에 제약을 가함을 인지하고 (주영진과 전덕빈, 1997), 식(11)과 같이 두 오차항 간의 상관관계를 고려하였다.

2.4 오차항들의 독립성 문제

주영진과 전덕빈 (1997)은 상태공간모형을 이용한 ARIMA(1,1,1) 과정을 따르는 거시 경제 변수의 추세(Trend)와 단기변동(Cycle)을 분리하는 문제에 있어서 기존의 연구에서 상태벡터들 사이의 오차항에 대한 가정의 문제점을 수리적으로 증명하고, 나아가 이들 오차항의 가정에 대한 정확한 기준을 제시하였다. 본 연구에서도 이자율 확률과정의 추정을 위해 제시한 상태공간모형과 동일한 관계에 있는 ARMA(2,1) 과정을 따르는 관측 가능한 시계열에서 순간적 이자율과 이들의 차이를 나타내는 요인의 분리 문제에 있어서 오차항의 가정에 대한 기준을 제시하고자 한다.

관측 가능한 단기 채권 수익률, $\{Y_t\}$가 ARMA(2,1) 과정을 따른다고 하면 이를 아래와 같은 식으로 표현 할 수 있다.

$$(1-\phi_1 B)(1-\phi_2 B)y_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} \quad \text{-- (7)}$$

본 연구에서 제시한 상태공간모형에서 추세를 생략 하고 행렬의 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$y_t = [1 \quad 1]x_t$$
$$x_t = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} x_{t-1} + \begin{bmatrix} v_t \\ w_t \end{bmatrix} \qquad * \ x_t = \begin{bmatrix} r_t \\ c_t \end{bmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} v_t \\ w_t \end{pmatrix} \sim BVN\left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}, \sigma_v^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho\lambda^{1/2} \\ \rho\lambda^{1/2} & \lambda \end{pmatrix}\right) \quad \text{-- (8)}$$

λ: 분산의 비율, ρ: 오차항들 사이의 상관계수

식(7)과 식(8)의 $\{Y_t\}$에 대한 자기상관계수 함수(Autocorrelation Function)가 동일하다는 조건으로부터 두 식간에 모수들의 동일성 관계를 고려하면 다음과 같이 유도된다.

$$\phi_1 = \alpha \ , \ \phi_2 = \gamma \quad \text{-- (9)}$$

$$\rho = \frac{(\theta\phi_2 - 1)(\phi_2 - \theta) + (\theta\phi_1 - 1)(\phi_1 - \theta)\lambda}{\{(\phi_1+\phi_2)\theta^2 - 2(1+\phi_1\phi_2)\theta + (\phi_1+\phi_2)\}\sqrt{\lambda}} \quad \text{--(10)}$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{(\phi_1-1)^2}{(\theta-1)^2}\sigma_w^2 + \frac{(\phi_2-1)^2}{(\theta-1)^2}\sigma_v^2 + \frac{2(\phi_1-1)(\phi_2-1)}{(\theta-1)^2}\rho\sigma_w\sigma_v \quad \text{-- (11)}$$

또한 식(4)의 오차항들의 분산-공분산 행렬의 비음 조건에 의해서 상태공간모형의 모수값이 제약을 받게 되는데 이는 다음과 같다.

$$\rho^2 \le 1 \quad \text{-- (12)}$$

따라서 오차항들 사이에 독립성을 가정하지 않았을 때는 식(4)를 만족하는 수많은 φ_1 , φ_2 , θ 가 존재할 수 있다. 그러나 오차항들 사이의 독립성을 가정할 때는 매우 제한적인 φ_1 , φ_2 , θ 의 공간에서만 모수값 추정이 가능하다. 이는 다음과 같은 관계에 의해 구해 질 수 있다. 먼저, 오차항들 간에 독립성이 가정되면 식(10)의 오차항들 간의 상관 계수 값인 ρ 가 '0'이 됨을 이용 하여 오차항의 분산들의 비율인 λ 가 아래 식과 같아 진다.

$$\lambda = -\frac{(\theta\phi_2 - 1)(\phi_2 - \theta)}{(\theta\phi_1 - 1)(\phi_1 - \theta)} \quad \text{-- (13)}$$

λ 가 항상 양의 값이 됨을 알고 있으므로 식(13)에서 φ_1 , φ_2 , θ 가 추정될 수 있는 영역이 아래와 같은 영역으로 제약됨을 알 수 있다.

$$\therefore min\{\ \phi_1, \phi_2\ \} < \theta < max\{\ \phi_1, \phi_2\ \} \quad \text{-- (14)}$$

따라서 관측된 시계열에 대한 ARMA(2,1) 추정에 의해 나온 모수값에서 MA 계수인 θ 값이 두 AR 계수 사이에 존재할 때만 상태공간모형을 구성할 때 상태방정식의 두 오차항의 관계를 독립적이라고 가정할 수 있다.

3. 실증분석

본 연구에서 제시한 상태공간모형을 이용한 순간적 이자율의 확률과정 추정을 위해서 1981 년 9 월부터 1986 년 2 월까지의 미국 T bill 3 개월 만기 채권의 월별 수익률을 이용하였다.

모형 추정 전 자료에 대한 단위근 검정 결과 단위근이 존재하지 않는 것으로 나타났으며, 자료에 대해 아래와 같은 ARMA(2,1)모형이 추정되었다 (추정치 밑의 괄호 안은 표준오차임).

$$(1 - \underset{(0.280)}{0.7208}\, B + \underset{(0.047)}{0.1122}\, B^2)(y_t - \underset{(0.806)}{8.0727})$$
$$= (1 - 0.493\,B)(1 - 0.227\,B)(y_t - 8.0727)$$
$$= \varepsilon_t - 0.3199\,\varepsilon_{t-1}$$

추정된 AR 계수들과 MA 계수를 살펴보면 식 (14)의 관계가 만족됨을 확인할 수 있다. 따라서 상태방정식의 두 오차항의 관계가 서로 독립이라고 가정하여도 상태공간모형의 추정에 문제가 발생하지 않는다. 오차항의 독립을 가정하고 ARMA(2,1)에 해당하는 상태공간 모형을 아래와 같이 구성하였으며 주어진 자료에 대한 추정결과는 '표 1'과 같다.

$$y_t = [1 \quad 0 \quad 1]x_t$$
$$x_t = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} x_{t-1} + \begin{bmatrix} v_t \\ 0 \\ w_t \end{bmatrix} \qquad * \ x_t = \begin{bmatrix} r_t \\ \beta_t \\ c_t \end{bmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} v_t \\ w_t \end{pmatrix} \sim BVN\left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}, \begin{pmatrix} \sigma_v^2 & 0 \\ 0 & \sigma_w^2 \end{pmatrix}\right)$$

표 1 상태공간모형 추정결과

변수	계수	Std. Error	t-Statistic	Prob.
$\hat{\alpha}$	0.5113	0.2478	2.063	0.046
$\hat{\beta}$	3.7556	0. 3322	11.305	0.000
$\hat{\gamma}$	0.2301	0.0204	11.279	0.000
$\hat{\sigma}_v^2$	0.4322	0.1933	2.236	0.030
$\hat{\sigma}_w^2$	0.2675	0.0892	2.999	0.001

주어진 모형의 O 행렬은 다음과 같다.

$$O=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & \gamma \\ \alpha^2 & \alpha+1 & \gamma^2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |O|=(\gamma-1)(\gamma-\alpha)=0.2164$$

이자율 확률과정의 속성을 나타내는 모수, 즉 추세와 확산의 값은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\hat{\alpha}=(1-\kappa\Delta)=0.5113 \qquad \therefore \kappa=5.88$$

$$\hat{\beta}=\kappa\theta\Delta=3.7556 \qquad \therefore \theta=7.6848$$

$$\hat{\sigma}\sqrt{\Delta}_v=0.4332 \qquad \therefore \hat{\sigma}=0.12$$

4. 결론

본 연구에서는 기존 이자율 확률과정 추정시 대용변수 사용으로 발생되는 문제 극복을 위한 새로운 상태공간모형을 제안하였다.

제안된 상태공간모형을 이용할 때 다음의 두 가지 중요한 시사점을 발견하였다. 그 첫째는 상태공간모형 수립에 있어 기존 연구들에서 간과한 관측가능성의 문제이다. 상태공간모형 수립 시 관측 가능성에 대한 점검이 반드시 이루어져야 한다. 둘째는 오차항 독립성 가정의 문제이다. 상태공간모형의 오차항간 독립성에 대한 가정으로 인해 모수값의 추정 가능성이 크게 제한될 수 있다. 이는 이자율 확률과정의 추정뿐만 아니라 상태공간모형 사용시 반드시 고려되어야 한다.

참고문헌

Alois L. J. Geyser, Stefan Pichler, "A State-Space Approach to estimate and test Multifactor Cox-Ingersolll-Ross Models of The Term Structure" The Journal of Financial Research (1999), 107-130.

Aoki, M., State-Space Modelling of Time Series , Berlin: Springer-Verlag, 1990.

Box, G. E. P and Jenkins, G. M., Time Series Analysis: Forecasting and Control, San Francisco, CA: Holden day, 1976.

Chapman, David A., John B. Long, Jr. and Neil D. Pearson. " Using Proxies for the Short Rate : When Are There Months Like an Instant?" The Review of Financial Studies 12 (1999), 763-806.

Chen, Ren-Raw and Louis O, Scott. "Pricing Interest Rate Options in a Two Factor Cox-Ingersoll-Ross Model of the Term Structure." The Review of Journal of Financial Studies 5(1992), 613-636.

Duffie, Darrell. "State-Space Models of the Term Structure of Interest Rates" Philosophical Transactions of the Royal Society(1994) , 577-586.

Harvey, A. C., Forecasting, Structural Time Series Models and Kalman Filter, Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

Jin-Chuan Duan. and Jean-Guy Simonato. "Estimating and Testing Exponencial-Affine Term Structure Models by Kalman Filter" Review of Quantitative Finance and Accounting 1999, 111-135.

Nelson, C. R., and Plosser, C.I., "Trend and Random Walks In Macroeconomic Time Series With a unit root" Journal of Economic Dynamics and Control (1988), 478-488.

Simon H. Babbs. and K. Ben Nowman. "Kalman Filtering of Generalized Vasicek Term Structure Models." Journal of Financial and Quantitative Analysis (1999), 115-130.

Vasicek, Oldrich. "An Equilibrium Characterization of the Term structure." Journal of Financial Economics (1977), 177-188.

West, M. and Harrison, J. Bayesian Forecasting Dynamics Models. Berlin : Springer-Verlag, 1989.

Young Jin Joo and Duk Bin Jun. "State-Space Trend Cycle Decomposition of the ARIMA(1,1,1) Process." Journal of Forecasting (1997), 411-424.