상태 공간 모형에서의 모수 공간 제약
Parameter Space Restriction in State-Space Model

전덕빈, 김동수, 박성호
한국과학기술원 테크노경영대학원, dbjun@kgsm.kaist.ac.kr

Abstract

Most studies using state-space models have been conducted under the assumption of independently distributed noises in measurement and state equation without adequate verification of the assumption. To avoid the improper use of state-space model, testing the assumption prior to the parameter estimation of state-space model is very important. The purpose of this paper is to investigate the general relationship between parameters of state-space models and those of ARIMA processes. Under the assumption, we derive restricted parameter spaces of ARIMA(p,0,p-1) models with mutually different AR roots where $p \le 5$. In addition, the results of ARIMA(p,0,p-1) case can be expanded to more general ARIMA models, such as ARIMA(p-1,0,p-1), ARIMA(p-1,1,p-1), ARIMA(p,0,p-2) and ARIMA(p-1,1,p-2).

1. Introduction

Kalman(1960), Kalman & Bucy(1961)에 의하여 처음으로 개발된 상태 공간 모형(state-space model)은 관측 불가능한 상태 변수들이 동적으로 상호 연관된 시계열 자료들을 표현하고, 향후 미래를 예측하기에 매우 유용한 도구이다. 상태 공간 모형은 공학에서 처음 개발되었음에도 불구하고, 관측 불가능한 상태 변수들의 동적인 관계를 표현할 수 있다는 점에서 경영 및 경제학 분야에서도 많이 활용되고 있다.

그 중에서도 경제 및 경영 시계열 자료를 영속적인 요소와 일시적인 요소로 분리하는 장기 추세-단기 변동 분리(trend-cycle decomposition)와 관련된 연구들에서 상태 공간 모형이 활발하게 활용되었다. Harvey (1985), Watson(1986), Clark(1987)은 장기 추세와 단기 변동 변수를 관측 불가능한 상태 변수로 설정, 상태 공간 모형을 활용하여 불안정한 시계열 자료를 장기 추세와 단기 변동으로 분리해 내는 방법을 제안하고, 이를 이용하여 미국의 실질 총생산을 장기 추세와 단기 변동으로 분리해 내었다. 이들의 모형은 약간의 부분에서 다를 뿐, 거의 유사하며, 공통적으로 장기 추세 방정식과 단기 변동 방정식의 오차항이 독립적이라는 가정 하에 수립되었다. 연구 결과를 보면 이들의 모형이 실제 경기 순환 자료를 잘 설명하는 것처럼 나타났으나, 실제로는 추정된 AR 계수들의 합이 1에 가깝기 때문에 가성 분리(spurious decomposition)일 가능성이 높은, 즉 잘못 분리한 결과임이 밝혀졌다(Nelson, 1988).

Joo & Jun(1997)은 상태 공간 모형을 활용한 장기 추세-단기 변동 분리 과정에서 장기 추세 방정식과 단기 변동 방정식의 오차항이 서로 독립적인 경우, 대응되는 ARIMA (1,1,1) 또는 ARIMA(0,1,1) 모형의 모수 공간이 제약되는 것을 보였다. 이를 Watson(1986)의 연구 결과에 적용해보면, 추정된 모수 값들은 오차항의 독립 분포 가정으로 인하여 제약된 ARIMA 모수 공간의 밖에 존재하는 것으로 나타났다.

이 연구의 목적은 Joo & Jun(1997)의 결과를 더 높은 차수의 ARIMA 모형으로 확장하여, 단순 상태 공간 모형에서의 오차항의 독립 분포 가정이 대응되는 ARIMA 모형의 모수 공간을 어떻게 제약하는지 알아보는 것이다. 더 나아가 그 결과를 어떻게 확장하여 적용시킬 수 있는지 알아보고자 한다.

2. Spurious Decomposition in Watson's Model

Watson(1986)은 미국의 실질 GNP를 장기 추세와 단기 변동으로 분리하기 위하여 다음과 같은 상태 공간 모형을 사용하였다.

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_t \\ C_t \\ C_{t-1} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} T_t \\ C_t \\ C_{t-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & \phi_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{t-1} \\ C_{t-1} \\ C_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.008 + w_t \\ v_t \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1}
$$

여기서 Y_t 는 미국의 실질 GNP, T_t 는 분리된 장기 추세, C_t 는 분리된 단기 변동이며, w_t 와 v_t 는 각각 장기 추세와 단기 변동의 오차항으로 서로 독립적으로 $N\left(0,\sigma_w^2\right)$, $N\left(0,\sigma_v^2\right)$ 분포를 따른다고 가정하였다. 이 상태 공간 모형에 대응되는 ARIMA 모형은 다음과 같은 ARIMA(2,1,2) 모형이다.

$$\left(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2\right)(1-B)Y_t=\left(1-\theta_1 B-\theta_2 B^2\right)\varepsilon_t \tag{2}$$

여기서 B 는 후행 연산자(backshift operator)이며, Y_t 는 미국의 실질 GNP, ε_t 는 오차항으로 $N\left(0,\sigma_\varepsilon^2\right)$ 분포를 따른다. 그러나 Watson이 세운 상태 공간 모형에서 오차항 w_t 와 v_t 가 서로 독립이라는 가정을 하게 되면, 표현할 수 있는 ARIMA(2,1,2) 모형의 모수 공간을 다음과 같이 제약하게 된다.

$$\phi_2\left(1+\theta_1^2+\theta_2^2-2\theta_1+2\theta_1\theta_2\right)=\theta_2\left(1+\phi_1^2+\phi_2^2-2\phi_1+2\phi_1\phi_2\right) \quad (3\text{-}1)$$

$$\phi_2>0,\ \theta_2>0 \quad or \quad \phi_2<0,\ \theta_2<0 \quad (3\text{-}2)$$

$$\theta_2/\phi_2<\left(1+\theta_1^2+\theta_2^2\right)/\left(1+\phi_1^2+\phi_2^2\right) \quad (3\text{-}3)$$

Watson은 논문에서 정확하게 어떠한 자료를 사용했는지 밝히지 않고 있기 때문에, 그의 연구 결과와 비슷한 구간의 미국 실질 GNP를 가지고 ARIMA 모형으로 분석한 Campbell & Mankiw(1987)의 결과를 위의 조건에 대입하면 다음과 같이 만족하지 않음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\phi_1=0.626,\ \phi_2=-0.462,\ \theta_1=0.325,\ \theta_2=-0.592\\
&\phi_2\left(1+\theta_1^2+\theta_2^2-2\theta_1+2\theta_1\theta_2\right)=-0.195\\
&\quad\neq\ \theta_2\left(1+\phi_1^2+\phi_2^2-2\phi_1+2\phi_1\phi_2\right)=0.133\\
&\theta_2/\phi_2=1.281\\
&\quad>\ \left(1+\theta_1^2+\theta_2^2\right)/\left(1+\phi_1^2+\phi_2^2\right)=0.907
\end{aligned} \quad (4)$$

Joo & Jun(1997)은 Watson의 상태 공간 모형에 대응되는 ARIMA(2,1,2) 모형에서 하나의 AR근과 하나의 MA근이 거의 동일하기 때문에 ARIMA (1,1,1) 모형으로 축약할 수 있다는 것을 밝혔다. 축약된 ARIMA(1,1,1) 모형과 이에 대응되는 상태 공간 모형은 다음과 같다.

$$\left(1-\phi B\right)\left(1-B\right)Y_t=\left(1-\theta B\right)\varepsilon_t \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
Y_t&=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_t\\ C_t\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}T_t\\ C_t\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_{t-1}\\ C_{t-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}w_t\\ v_t\end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (6)$$

이 경우에도 상태 공간 모형의 두 오차항이 서로 독립이라는 가정 하에서는 모든 ARIMA(1,1,1) 모형을 표현할 수 없으며, 다음과 같이 제약된 모수 범위만 나타낼 수 있다.

$$\phi<\theta \quad (7)$$

Campbell & Mankiw의 ARIMA(1,1,1) 분석 결과는 $\phi=0.522$, $\theta=0.179$ 로 위 범위 밖에 존재한다. 따라서 Watson의 모형으로 미국의 실질 GNP를 분석하기 위해서는 오차항 w_t 와 v_t 가 서로 독립이라는 가정을 제거해야만 한다.

3. ARIMA(3,0,2) case and its expansions

다음과 같은 ARIMA(3,0,2) 과정을 따르는 시계열 Y_t 를 생각하자.

$$\begin{aligned}
\left(1-\phi_1B\right)\left(1-\phi_2B\right)\left(1-\phi_3B\right)Y_t&=\left(1-\theta_1B\right)\left(1-\theta_2B\right)\varepsilon_t\\
\varepsilon_t&\sim N\left(0,\sigma_\varepsilon^2\right)
\end{aligned} \quad (8)$$

단, ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 는 모두 θ_1 , θ_2 와 다른 값을 갖으며, 절대값이 모두 1보다 작다. 따라서 이 시계열은 안정적이며 가역적이다. 이 시계열에 대응하는 오차항이 독립적인 상태 공간 모형은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&Y_t=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}X_t\\
&X_t=\begin{bmatrix}\phi_1 & 0 & 0\\ 0 & \phi_2 & 0\\ 0 & 0 & \phi_3\end{bmatrix}X_{t-1}+\begin{bmatrix}e_{1,t}\\ e_{2,t}\\ e_{3,t}\end{bmatrix}\\
&\mathrm{cov}\begin{bmatrix}e_{1,t}\\ e_{2,t}\\ e_{3,t}\end{bmatrix}=\sigma_\varepsilon^2\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (9)$$

여기서 각각의 오차항 $e_{i,t}$ 는 $N\left(0,\sigma_i^2\right)$ 분포를 따르며, λ_i 는 분산의 비율, $\sigma_i^2/\sigma_\varepsilon^2$ 을 나타낸다. 식 (9)에서 X_t 를 소거하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\left(1-\phi_1L\right)\left(1-\phi_2L\right)\left(1-\phi_3L\right)Y_t=&\left(1-\phi_2L\right)\left(1-\phi_3L\right)e_{1,t}\\
&+\left(1-\phi_1L\right)\left(1-\phi_3L\right)e_{2,t}\\
&+\left(1-\phi_1L\right)\left(1-\phi_2L\right)e_{3,t}
\end{aligned} \quad (10)$$

식 (8)과 식 (10)의 Y_t 에 대한 자기공분산을 유도하여 비교하면, 다음과 같은 연립방정식을 얻을 수 있다.

$$\overbrace{\begin{bmatrix}1+\left(\phi_2+\phi_3\right)^2+\phi_2^2\phi_3^2 & 1+\left(\phi_1+\phi_3\right)^2+\phi_1^2\phi_3^2 & 1+\left(\phi_1+\phi_2\right)^2+\phi_1^2\phi_2^2\\ \left(\phi_2+\phi_3\right)+\phi_2\phi_3\left(\phi_2+\phi_3\right) & \left(\phi_1+\phi_3\right)+\phi_1\phi_3\left(\phi_1+\phi_3\right) & \left(\phi_1+\phi_2\right)+\phi_1\phi_2\left(\phi_1+\phi_2\right)\\ \phi_2\phi_3 & \phi_1\phi_3 & \phi_1\phi_2\end{bmatrix}}^{D}\times\underbrace{\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}}_{\Lambda}=\underbrace{\begin{bmatrix}1+\left(\theta_1+\theta_2\right)^2+\theta_1^2\theta_2^2\\ \left(\theta_1+\theta_2\right)+\theta_1\theta_2\left(\theta_1+\theta_2\right)\\ \theta_1\theta_2\end{bmatrix}}_{C} \quad (11)$$

만약 $\phi_1\neq\phi_2$, $\phi_2\neq\phi_3$, $\phi_1\neq\phi_3$ 인 경우에는, 행렬 D 의 행렬식이 0이 아니므로 가역적이며 따라서 해가 존재한다. 이 때, 해를 구해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\lambda_1&=\frac{\left(\phi_1-\theta_1\right)\left(\phi_1-\theta_2\right)\left(1-\phi_1\theta_1\right)\left(1-\phi_1\theta_2\right)}{\left(\phi_1-\phi_2\right)\left(\phi_1-\phi_3\right)\left(1-\phi_1\phi_2\right)\left(1-\phi_1\phi_3\right)}\\
\lambda_2&=\frac{\left(\phi_2-\theta_1\right)\left(\phi_2-\theta_2\right)\left(1-\phi_2\theta_1\right)\left(1-\phi_2\theta_2\right)}{\left(\phi_2-\phi_1\right)\left(\phi_2-\phi_3\right)\left(1-\phi_2\phi_1\right)\left(1-\phi_2\phi_3\right)}\\
\lambda_3&=\frac{\left(\phi_3-\theta_1\right)\left(\phi_3-\theta_2\right)\left(1-\phi_3\theta_1\right)\left(1-\phi_3\theta_2\right)}{\left(\phi_3-\phi_1\right)\left(\phi_3-\phi_2\right)\left(1-\phi_3\phi_1\right)\left(1-\phi_3\phi_2\right)}
\end{aligned} \quad (12)$$

분산의 비음조건(non-negative definite condition of variances)에 의하여, λ_1 , λ_2 , λ_3 는 모두 양수여야 한다. 따라서 다음과 같은 제약된 모수 공간을 유

도할 수 있다.

$$\max(\phi_1,\phi_2,\phi_3) > \max(\theta_1,\theta_2) > \mathrm{mid}(\phi_1,\phi_2,\phi_3) > \min(\theta_1,\theta_2) > \min(\phi_1,\phi_2,\phi_3) \quad (13)$$

만약 $\phi_1=\phi_2$ 또는 $\phi_2=\phi_3$ 또는 $\phi_1=\phi_3$ 인 경우에는, D 의 행렬식이 0이 되어 비가역적이므로 해가 존재하지 않는다. 따라서 식 (9)의 상태 공간 모형으로 표현할 수 없다. $\phi_1 \neq \phi_2$, $\phi_2 \neq \phi_3$, $\phi_1 \neq \phi_3$ 이지만 $\theta_1=\theta_2$ 인 경우에는, D 가 가역적이므로 해가 존재하지만 식 (13)로부터 제약된 모수 공간이 존재하지 않게 되어 역시 식 (9)의 상태 공간 모형으로 표현할 수 없다.

AR 및 MA 모수들의 값이 0이 아니라는 조건과 안정 조건(stationary condition)은 위의 유도 과정에서 어떤 단계에도 영향을 미치지 않으므로, 이 조건들은 모두 소거 가능하다. $\phi_1=1$ 인 경우, ARIMA(2,1,2) 시계열을 나타내며, 식 (13)에 의하여 ARIMA 모수 공간은 다음과 같이 제약된다.

$$\max(1,\phi_2,\phi_3) > \max(\theta_1,\theta_2) > \mathrm{mid}(1,\phi_2,\phi_3) > \min(\theta_1,\theta_2) > \min(1,\phi_2,\phi_3) \quad (14)$$

$\phi_1=0$ 인 경우, ARIMA(2,0,2) 시계열을 나타내며, 식 (13)에 의하여 모수 공간은 다음과 같이 제약된다.

$$\max(0,\phi_2,\phi_3) > \max(\theta_1,\theta_2) > \mathrm{mid}(0,\phi_2,\phi_3) > \min(\theta_1,\theta_2) > \min(0,\phi_2,\phi_3) \quad (15)$$

$\theta_1=0$ 인 경우, ARIMA(3,0,1) 시계열을 나타내며, 모수 공간은 다음과 같이 제약된다.

$$\max(\phi_1,\phi_2,\phi_3) > \max(0,\theta_2) > \mathrm{mid}(\phi_1,\phi_2,\phi_3) > \min(0,\theta_2) > \min(\phi_1,\phi_2,\phi_3) \quad (16)$$

$\phi_1=1$, $\theta_1=0$ 인 경우, ARIMA(2,1,1) 시계열을 나타내며, 따라서 모수 공간은 다음과 같이 제약된다.

$$\max(1,\phi_2,\phi_3) > \max(0,\theta_2) > \mathrm{mid}(1,\phi_2,\phi_3) > \min(0,\theta_2) > \min(1,\phi_2,\phi_3) \quad (17)$$

그러나 ARIMA(3,0,0) 시계열은 $\theta_1=\theta_2=0$ 인 경우이므로 식 (13)로부터 제약된 모수 공간은 존재하지 않게 되어 식 (9)의 상태 공간 모형으로 표현할 수 없다. 마찬가지로 ARIMA(1,2,2) 시계열은 $\phi_1=\phi_2=1$ 인 경우이므로 D 행렬이 비가역적이 되어 식 (9)의 상태 공간 모형으로 표현할 수 없다.

이 결과를 ARIMA(p,0,p-1) 경우로 확장하기 위하여, 다음과 같은 시계열 Y_t 를 생각하자.

$$(1-\phi_1B)(1-\phi_2B)\cdots(1-\phi_pB)Y_t = (1-\theta_1B)(1-\theta_2B)\cdots(1-\theta_{p-1}B)\varepsilon_t , \quad \varepsilon_t \sim N(0,\sigma_\varepsilon^2) \quad (18)$$

여기서 모든 AR 모수들의 값은 모든 MA 모수들의 값과 다르며, 모든 모수들의 절대값은 1보다 작다. 이 ARIMA(p,0,p-1) 모형에 대응하는 상태 공간 모형은 다음과 같다.

$$Y_t = [1\ 1\ \cdots\ 1]X_t$$
$$X_t = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \phi_p \end{bmatrix} X_{t-1} + \begin{bmatrix} e_{1,t} \\ e_{2,t} \\ \vdots \\ e_{p,t} \end{bmatrix} \quad (19)$$
$$\mathrm{cov}\begin{bmatrix} e_{1,t} \\ e_{2,t} \\ \vdots \\ e_{p,t} \end{bmatrix} = \sigma_\varepsilon^2 \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{bmatrix}$$

여기서 각각의 오차항 $e_{i,t}$ 는 $N(0,\sigma_i^2)$ 분포를 따르며, λ_i 는 분산의 비율, $\sigma_i^2/\sigma_\varepsilon^2$ 을 나타낸다. ARIMA(3,0,2) 경우와 마찬가지 방법으로 풀면, $p \le 5$ 인 경우에 대해서 다음과 같은 연립방정식 및 그 해를 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \psi_{1,1}^2+\cdots & \psi_{2,1}^2+\cdots & \cdots & \psi_{p,1}^2+\cdots \\ \psi_{1,1}\psi_{1,2}+\cdots & \psi_{2,1}\psi_{2,2}+\cdots & \cdots & \psi_{p,1}\psi_{p,2}+\cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{1,1}\psi_{1,p} & \psi_{2,1}\psi_{2,p} & \cdots & \psi_{p,1}\psi_{p,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{\theta,1}^2+\cdots \\ \psi_{\theta,1}\psi_{\theta,2}+\cdots \\ \vdots \\ \psi_{\theta,1}\psi_{\theta,p} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\lambda_i = \frac{\left\{\prod_{j=1}^{p-1}(\phi_i-\theta_j)\prod_{j=1}^{p-1}(\phi_i\theta_j-1)\right\}}{\left\{\prod_{j=1,j\neq i}^{p}(\phi_i-\phi_j)\prod_{j=1,j\neq i}^{p}(\phi_i\phi_j-1)\right\}} \quad (21)$$

비음조건으로부터 λ_i 는 양수여야만 한다. 만약 ϕ_1 , ϕ_2 , $\cdots$, ϕ_p 와 θ_1 , θ_2 , $\cdots$, θ_{p-1} 이 내림차순으로 정렬되어 있다면, 식 (18)의 ARIMA 모형의 모수 공간은 다음과 같이 제약된다.

$$\phi_1 > \theta_1 > \phi_2 > \theta_2 > \cdots > \theta_{p-1} > \phi_p \quad (22)$$

둘 이상의 AR 모수들의 값이 동일한 경우에는, 행렬 D 의 두 열 이상이 동일하므로 D 의 행렬식은 0이 되며 따라서 D 는 비가역적이다. 그러므로 식 (20)은 해가 존재하지 않는다. 이는 둘 이상의 AR 모수들의 값이 동일한 ARIMA 모형은 식 (19)의 상태 공간 모형으로 나타낼 수 없다는 것을 의미한다.

모든 AR 모수들의 값은 서로 다르지만, 둘 이상의 MA 모수들의 값이 같은 경우, D 의 행렬식이 0이 아니므로 행렬 D 는 가역적이다. 그러나 그 어떠한 해도 분산의 비음조건을 만족하지 않으므로 제약된 모수 공간은 존재하지 않으며, 식 (19)의 상태 공간 모형으로 나타낼 수 없다.

ARIMA(3,0,2) 모형의 경우에서처럼 AR 및 MA 모수들의 값이 0이 아니라는 조건과 안정 조건은 위의 유도 과정에서 어떤 단계에도 영향을 미치지 않는다. 따라서 이 조건들은 모두 소거할 수 있다.

ARIMA(p-1,1,p-1)의 경우, 하나의 AR 모수의 값이 1인 ARIMA(p,0,p-1) 시계열이라 할 수 있으므로 식 (22)의 ARIMA 모수 공간은 다음과 같다.

$$1 > \theta_1 > \phi_1 > \theta_2 > \phi_2 > \cdots > \theta_{p-1} > \phi_{p-1} \qquad (23)$$

같은 방법으로 ARIMA(p-1,0,p-1) 시계열은 하나의 AR 모수가 0인 ARIMA(p,0,p-1) 시계열이라 생각할 수 있다. 역시 식 (22)으로부터, 제약된 모수 공간은 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} &\phi_1 > \theta_1 > \phi_2 > \theta_2 > \cdots > \phi_k > \theta_k > 0 \\ &> \theta_{k+1} > \phi_{k+1} > \theta_{k+2} > \phi_{k+2} > \cdots > \theta_{p-1} > \phi_{p-1} \end{aligned} \qquad (24)$$

ARIMA(p,0,p-2) 시계열 역시 위와 유사하게 하나의 MA 모수가 0인 ARIMA(p,0,p-1) 시계열이라 생각할 수 있으므로 모수 공간은 다음과 같이 제약된다.

$$\begin{aligned} &\phi_1 > \theta_1 > \phi_2 > \theta_2 > \cdots > \theta_{k-1} > \phi_k > 0 \\ &> \phi_{k+1} > \theta_k > \phi_{k+2} > \theta_{k+1} > \cdots > \theta_{p-2} > \phi_p \end{aligned} \qquad (25)$$

이러한 확장들은 동시에 일어날 수도 있다. ARIMA(p-1,1,p-2) 시계열은 하나의 AR 모수는 1이고, 하나의 MA 모수는 0인 ARIMA(p,0,p-1) 시계열이라 할 수 있다. 따라서, ARIMA 모수 공간은 다음과 같이 제약된다.

$$\begin{aligned} &1 > \theta_1 > \phi_1 > \theta_2 > \phi_2 > \cdots > \theta_k > \phi_k > 0 \\ &> \phi_{k+1} > \theta_{k+1} > \phi_{k+2} > \theta_{k+2} > \cdots > \theta_{p-2} > \phi_{p-1} \end{aligned} \qquad (26)$$

이 특수한 경우에도 AR과 MA 모수들이 모두 서로 다르다는 조건은 역시 만족해야만 한다. 따라서 둘 이상의 AR 또는 MA 모수가 0 또는 1이 될 수 없다.

4. Conclusion

본 연구에서는 단순 상태 공간 모형에서의 오차항의 독립 분포 가정이 대응하는 ARIMA 모형의 모수 공간을 일반적으로 어떻게 제약하는지 살펴보았으며, 그 결과 식 (19)의 단순 상태 공간 모형으로 나타낼 수 있는 ARIMA(p,0,p-1) 모형의 모수 공간은 식 (22)와 같이 주어짐을 $p \le 5$ 의 경우에 대해서 유도해내었다. 그리고 이를 확장하여 ARIMA(p-1,0,p-1), ARIMA(p-1,1,p-1), ARIMA (p,0,p-2), ARIMA(p-1,1,p-2) 모형의 조금 더 일반적인 경우에까지 적용시킬 수 있음을 보였다. 또한 이러한 결과는 모든 AR 모수들의 값 또는 MA 모수들의 값이 서로 다른 경우에만 적용시킬 수 있으며, 둘 이상의 AR 모수들의 값 또는 MA 모수들의 값이 동일한 시계열의 경우에는 표현할 수 없거나, 제약된 모수 공간이 존재하지 않게 되어 식 (19)의 상태 공간 모형으로 설명할 수 없음을 밝혔다.

그러나 식 (22)의 결과를 $p \le 5$ 의 경우에만 유도하여 엄밀하게 일반화된 결론을 제시하지 못하였다는 한계와, 둘 이상의 AR 모수들의 값 또는 MA 모수들의 값이 동일한 시계열의 경우에는 식 (19)를 대신할 수 있는 다른 상태 공간 모형이 존재할 수 있다는 점은 향후 연구 과제로 남겨둔다.

Reference

Box, G. E. P. and Jenkins, G. M. (1976), Time Series Analysis: Forecasting and Control, Holden-Day, San Francisco, CA.

Campbell, J. Y. and Mankiw, N. G. (1987), Are output fluctuations transitory?, Quarterly Journal of Economics, 102, 857-880.

Clark, P. K. (1987), The cyclical component of U.S. economic activity, Quarterly Journal of Economics, 102, 797-814.

Hamilton, J. D. (1994), Time Series Analysis, Princeton University Press, Princeton, NJ.

Harvey, A. C. (1985), Trends and cycles in macroeconomic time series, Journal of Business & Economic Statistics, 3, 216-227.

Harvey, A. C. (1989), Forecasting. Structural Time Series Models and the Kalman Filter, Cambridge University Press, Cambridge, MA.

Hoffman, K. M. and Kunze, R. A. (1971), Linear Algebra, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.

Joo, Y. J. and Jun, D. B. (1997), State space trend-cycle decomposition of the ARIMA(1,1,1) process, Journal of Forecasting, 16, 411-424.

Kalman, R. E. (1960), A new approach to linear filtering and prediction problems, Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering, 82, 34-45.

Kalman, R. E. and Bucy, R. S. (1961), New results in linear filtering and prediction theory, Transactions of the ASME – Journal of Basic Engineering, 83, 95-108.

Kim, C. J. and Nelson, C. R. (1999), State-Space Models with Regime Switching: Classical and Gibbs-Sampling Approaches with Applications, MIT Press, Cambridge, MA.

Nelson, C. R. (1988), Spurious trend and cycle in the state space decomposition of a time series with a unit root, Journal of Economic Dynamics and Control, 12, 475-488.

Watson, M. W. (1986), Univariate detrending methods with stochastic trends, Journal of Monetary Economics, 18, 49-75.